

ТЕМА V. Интегральное исчисление функции с одной переменной

**«МАТЕМАТИКА – ЭТО ТО,
ПОСРЕДСТВОМ ЧЕГО ЛЮДИ
УПРАВЛЯЮТ ПРИРОДОЙ И
СОБОЙ»**

**А.Н.
КОЛМОГОРОВ**

•

•

•

•

•

Сформулируйте свойства неопределенного интеграла, пользуясь приведенными равенствами:

Методы интегрирования неопределенного интеграла

- Непосредственное интегрирование.
- Метод замены переменной.
- Метод интегрирования по частям.

МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

-- ПРИМЕНЯЕМ СВОЙСТВА **4, 5, 6**
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА И ТАБЛИЦУ
НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

$$4. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$5. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$6. \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$$

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$10. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$11. \int e^x dx = e^x + C$$

ПРИМЕРЫ

$$1. \int \left(6x^5 + 18x^2 - 24 \sin x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} + 18x - 21 \right) dx$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Данный метод предполагает, что в подынтегральном выражении есть сложная функция, т.е., для упрощения интегрирования необходимо внутреннюю функцию сложной функции заменить новой переменной.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$, причем,

первообразную нельзя подобрать непосредственно по таблице.

Сделаем замену переменной по формуле $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной,

имеющая обратную функцию. Тогда справедливо равенство:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (*)$$

Равенство (*) подразумевает, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено выражение через x , т.е., необходим возврат к старой переменной.

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, \underline{\varphi'(t)} \cdot dt.$$

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(kx + b)' = k$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	

$$dy = y' \cdot dx$$

$$\begin{array}{l}
 1. \int dx = x + C \\
 2. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1 \\
 3. \int e^x dx = e^x + C \\
 4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \\
 5. \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 6. \int \cos x dx = \sin x + C \\
 7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
 8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
 9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
 10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \\
 11. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1
 \end{array}$$

ПРИМЕРЫ

1. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(kx + b)' = k$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	

$$dy = y' \cdot dx$$

$1. \int dx = x + C$
$2. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1$
$3. \int e^x dx = e^x + C$
$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$
$6. \int \cos x dx = \sin x + C$
$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$11. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

ПРИМЕРЫ

1. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$ 2. $\int \sin x \cos x dx;$

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(kx + b)' = k$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	

$$dy = y' \cdot dx$$

$1. \int dx = x + C$
$2. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1$
$3. \int e^x dx = e^x + C$
$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$
$6. \int \cos x dx = \sin x + C$
$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$11. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

ПРИМЕРЫ

$$3. \int \frac{\ln x}{x} dx; \quad 4. \int x \cdot \sqrt{1 - x^2} dx.$$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы от сомножителей. Но иногда интеграл от произведения функций можно вычислить по формуле интегрирования по частям.

Пусть $U = U(x)$ и $V = V(x)$ - дифференцируемые функции.

Тогда дифференциал произведения $d(U \cdot V) = VdU + UdV$.

Проинтегрируем обе части равенства:

$\int d(UV) = \int VdU + \int UdV \Rightarrow UV = \int VdU + \int UdV$.
Окончательно получим формулу:

$$\int UdV = UV - \int VdU. \quad (**)$$

Формула (**) называется **формулой интегрирования по частям**.

Метод интегрирования по частям заключается в следующем:

-

-

-

-

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(kx + b)' = k$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	

$$dy = y' \cdot dx$$

$1. \int dx = x + C$
$2. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1$
$3. \int e^x dx = e^x + C$
$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$
$6. \int \cos x dx = \sin x + C$
$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$11. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

ПРИМЕРЫ:

1. $\int x \cdot e^x dx;$

,

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(kx + b)' = k$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	

$$dy = y' \cdot dx$$

$$\begin{array}{l}
 1. \int dx = x + C \\
 2. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1 \\
 3. \int e^x dx = e^x + C \\
 4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \\
 5. \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 6. \int \cos x dx = \sin x + C \\
 7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
 8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
 9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
 10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \\
 11. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1
 \end{array}$$

ПРИМЕРЫ:

$$2. \int x \cdot \sin x dx.$$

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

•

•

•

•

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Конспекты, подготовиться к опросу по формулам;
- Вычислить интегралы, самостоятельно определяя необходимый метод интегрирования:

$$a). \int \frac{dx}{x^5 \cdot \sqrt[4]{x^3}}; б). \int x \cdot \sin x dx; в). \int \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$г). \int \left(6x^5 - 24 \sin x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} + 18x - 21 \right) dx;$$

$$д). \int e^{-12x+3} dx; е). \int x \cdot \sqrt{1-x^2} dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

- Григорьев В. П. -Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений СПО/В. П. Григорьев, Ю. А. Дубинский. - 10-е изд., стер. М.: Издат. Центр «Академия», 2014.
- Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для студ. учреждений СПО /В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. - 6-е изд., стер. - М.: Издат. центр «Академия», 2016.