

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап  
2023-2024 уч.год  
6 класс  
Решения и ответы

1. Саша написал на доске семь цифр: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 0. Артему нужно, используя все цифры, составить наибольшее натуральное число, кратное 25. Какое число должно у него получиться?

*Решение.* Чтобы число делилось на 25, оно должно оканчиваться на 00, 25, 50 или 75. Из данного набора цифр можно получить только 25 или 50. Для того, чтобы получить наибольшее значение, остальные цифры в числе нужно поставить в порядке убывания. Получаем два варианта, 9643025 и 9643250. Наибольшим решением будет второй вариант.

*Ответ.* 9643250

2. Имеется 110 целых чисел, произведение которых равно 1. Докажите, что их сумма не может равняться нулю.

*Решение.* Так как произведение этих целых чисел равно 1, то все числа равны 1 или  $-1$ . Тогда, чтобы их сумма равнялась нулю, количество 1 должно равняться количеству  $-1$ . Значит, и 1, и  $-1$  будет по 55 штук. Но в таком случае их произведение будет равно  $-1$ . Получили противоречие.

3. В Петергофском парке гуляло 14 экскурсионных групп. Среднее количество туристов в группах со 2-й по 14-ю равно 25, а среднее количество туристов в группах с первой по 13-ю равно 23. Также известно, что среднее количество туристов в 1-й и 14-й группах равно 15. Сколько всего туристов гуляло в парке?

*Решение.* Пусть всего в парке гуляло  $S$  туристов. Пусть в 1-й группе было  $a$  туристов, в 14-й группе было  $b$  туристов.

Среднее количество туристов в группах со 2-й по 14-ю можно найти как  $\frac{S-a}{13} = 25$ .

Среднее количество туристов в группах с 1-й по 13-ю можно найти как  $\frac{S-b}{13} = 23$ .

Среднее количество в 1-й и 14-й группах равно  $\frac{a+b}{2} = 15$ .

Сложим первые два уравнения

$$\frac{S-a}{13} + \frac{S-b}{13} = 48$$

$$2S - (a+b) = 624$$

Подставим значение  $a+b=30$ .

$$2S - 30 = 624$$

$$2S = 654$$

$$S = 327.$$

*Ответ.* В парке гуляло 327 туристов.

4. Из одного семечка волшебного цветка, попавшего в землю, на следующее утро вырастает ровно один цветок. Каждый вечер каждый цветок выбрасывает ровно два семечка, которые падают на землю. В понедельник вечером девочка Женя посадила в клумбу несколько семечек волшебного цветка, и каждый следующий вечер добавляла в эту клумбу по три семечка. Сколько семечек Женя посадила в понедельник, если в воскресенье в клумбе росло 849 волшебных цветов?

*Решение.* Если в какой-то день утром в клумбе было  $N$  цветков, то на следующее утро будет  $N + 2N + 3 = 3(N + 1)$  цветков. Зная это соотношение, можно найти число цветков в предыдущий день, используя обратный ход. В субботу было 282 цветка, так как  $849 = 3 \cdot 283 = 3 \cdot (282 + 1)$ .

В пятницу было 93 цветка, так как  $282 = 3 \cdot 94 = 3 \cdot (93 + 1)$ .

В четверг было 30 цветков, так как  $93 = 3 \cdot 31 = 3 \cdot (30 + 1)$ .

В среду было 9 цветков, так как  $30 = 3 \cdot 10 = 3 \cdot (9 + 1)$ .

Во вторник было 2 цветка, так как  $9 = 3 \cdot 3 = 3 \cdot (2 + 1)$ .

Значит, в понедельник вечером Женя посадила 2 семечка.

*Ответ.* 2 семечка.

5. К четырехзначному числу прибавили первую цифру, потом удвоенную вторую цифру, потом утроенную третью цифру и четвертую цифру, умноженную на 4, и получили 2023. Какое это было число?

*Решение.* Пусть дано число  $\overline{abcd}$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  - цифры. Тогда по условию задачи получаем выражение  $\overline{abcd} + a + 2b + 3c + 4d =$   
 $= 1000a + 100b + 10c + d + a + 2b + 3c + 4d = 1001a + 102b + 13c + 5d = 2023$ . Отсюда получаем, что  $a$  может иметь два значения,  $a = 2$  и  $a = 1$ .

- $a = 2$

$$2002 + 102b + 13c + 5d = 2023$$

$$102b + 13c + 5d = 21$$

Здесь  $b = 0$ ,  $c = 1$ .

$$13 + 5d = 21$$

$$5d = 8$$

Получаем, что  $d$  является не целым числом. Следовательно такой случай невозможен.

- $a = 1$

$$1001 + 102b + 13c + 5d = 2023$$

$$102b + 13c + 5d = 1022$$

Здесь  $b = 9$ , иначе  $c$  и  $d$  принимают значения, больше 9.

$$918 + 13c + 5d = 1022$$

$$13c + 5d = 104$$

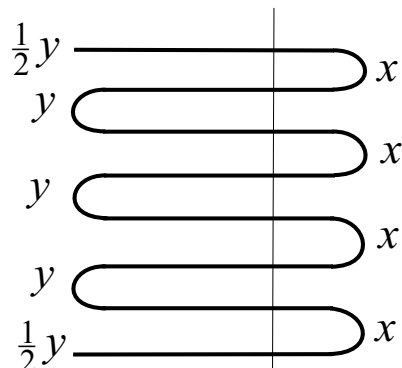
Заметим, что 104 и  $13c$  делится на 13, следовательно  $5d$  должно делиться на 13. Единственный вариант  $d$ , который подходит, это  $d = 0$ . Тогда  $c = 8$ .

Проверка:  $1980 + 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 0 = 2023$ .

*Ответ.* 1980

6. Веревочку сложили пополам, затем еще раз пополам, и затем еще раз пополам. Потом сложенную веревочку перерезали в одном месте. Она распалась на куски. Какой длины могла быть веревочка, если среди этих кусков оказались два известной длины, один 12 см, второй 7 см?

*Решение.*



Если правильно сложить веревочку, а затем разрезать, то получатся куски трех видов (см. рис.). Длины этих кусков обозначим  $x$ ,  $y$ ,  $\frac{1}{2}y$ . Длина веревочки получится равной  $4x + 3y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = 4(x + y)$ . Два данных куска не могут образовать пару  $y$ ,  $\frac{1}{2}y$ . Получаем четыре варианта:  $x = 12, y = 7$ ;  $x = 7, y = 12$ ;  $x = 12, \frac{1}{2}y = 7$ ,  $x = 7, \frac{1}{2}y = 12$ . Этим вариантам соответствует длина веревочки 76, 76, 104, 124.

*Ответ.* 76, 104, 124.