

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
*Муниципальный этап*  
2023-2024 уч.год  
11 класс

1. Можно ли так расставить натуральные числа в вершинах куба, чтобы были выполнены два правила:
  - любые два числа, стоящие в соседних вершинах, т.е. в вершинах, соединенных ребром, имели бы общий делитель;
  - любые два числа, стоящие в вершинах, которые соединяются диагональю грани или пространственной диагональю куба, не имели бы общих делителей, больших единицы?
2. График квадратного трехчлена  $y = x^2 + bx + c$  пересекает ось абсцисс в точках  $A$ ,  $B$  и пересекает ось ординат в точке  $C$ . Оказалось, что площадь треугольника  $ABC$  равна 45. Найдите значение  $b^2c^2 - 4c^3$ .
3. Пусть  $O$  – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Известно, что площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны 1 и 4. Докажите, что площадь четырехугольника  $ABCD$  не меньше 9.
4. Докажите, что не существует такого простого числа  $p$ , что  $p^5 + 2023p^3 - 1$  является квадратом целого числа.
5. В некотором клиентском зале расположены терминалы для работы посетителей и серверы (управляющие компьютеры). Каждый терминал соединен кабелями с некоторыми (но не всеми) серверами. Всего терминалов 15. Наблюдается такая закономерность. Если выбрать любую группу терминалов численностью 6 и выше, то окажется, что число всех серверов, с которыми соединены эти терминалы, ровно на 1 больше, чем число терминалов в выбранной группе. Докажите, что некоторый сервер соединен не менее, чем с 9 терминалами.

*Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.*

*Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.*

*Не забудьте обосновать свои решения задач!*