

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2023-2024 уч.год
5 класс
Решения и ответы

1. В классе 20 человек. К сегодняшнему дню нужно было выполнить домашние задания по математике и русскому языку и принести их, написанными на листочках. Каждый, кто принес домашнее задание по математике, принес и домашнее задание по русскому языку. Двенадцать человек забыли принести домашнее задание по математике, два человека забыли принести домашнее задание по русскому языку. Найдите, на сколько меньше школьников, которые принесли домашнее задание по математике, чем тех, кто принес домашнее задание по русскому языку, но забыл принести задание по математике?

Решение. По математике домашнее задание сделали $20 - 12 = 8$ человек. Получается, что эти 8 человек сделали домашнее задание и по математике, и по русскому языку.

По русскому языку сделали домашнее задание $20 - 2 = 18$ школьников. Из них $18 - 8 = 10$ сделали домашнее задание только по русскому языку, без математики.

Школьников, которые принесли домашнее задание по математике, было меньше числа школьников, которые принесли домашнее задание по русскому языку, но забыли по математике, на $10 - 8 = 2$, т.е. на 2 человека.

Ответ. 2

2. В квадрате 3×3 расставили числа от 100 до 108. Влад посчитал сумму чисел на одной диагонали и получил 303. Сережа посчитал сумму чисел на другой диагонали и получил 317. Какое число может стоять в центре квадрата?

Решение. 303 - это минимальная возможная сумма трех чисел из данных. Получается, что на диагонали, на которой вычислял сумму Влад, стоят числа 100, 101 и 102.

Рассмотрим теперь диагональ, на которой нашел сумму чисел Сережа. Одно из чисел, которое расположено по центру диагонали, должно совпадать с одним из чисел Влада. Тогда сумма оставшихся двух чисел может быть равна 217, 216 или 215. Максимальная сумма двух чисел из тех, что даны в условии, равна $108 + 107 = 215$. Получаем, что единственная подходящая сумма оставшихся Сережиных чисел равна 215. Тогда и среди чисел Влада, и среди чисел Сережи есть число 102. Именно это число и стоит по центру квадрата.

Ответ. 102

3. Можно ли разрезать прямоугольник 15×43 на прямоугольники с целыми сторонами, у которых одна сторона больше другой на 7?

Решение. Заметим, что у маленьких прямоугольников, на которые нужно разрезать исходный прямоугольник, обязательно одна из сторон будет четной. Тогда и площадь каждого из таких прямоугольников тоже будет четной. Следовательно площадь исходного прямоугольника тоже должна быть четной, а она нечетная. Поэтому нельзя исходный прямоугольник разрезать на прямоугольники с целыми сторонами, у которых длина больше ширины на 7.

Ответ. Нет.

4. Палиндромом называется число, которое читается слева направо так же, как и справа налево. Вставьте как можно меньше цифр в число 223230242035222 так, чтобы оно стало палиндромом, и докажите, что меньше цифр добавить нельзя.

Примером палиндрома является число 343.

Решение. Заметим, что в палиндроме, состоящем из нечетного количества цифр, все цифры, кроме центральной, должны повторяться четное количество раз. В исходном числе 5, 3 и 4 повторяются по одному разу, остальные цифры повторяются четное количество раз. Поэтому мы можем добавить две какие-то цифры, и число цифр останется нечетным. Если же мы добавим три цифры, чтобы все цифры встретились дважды, то нам придется добавить цифр больше, чем две.

Чтобы количество цифр в нашем палиндроме было нечетным, 4 может остаться в центре, и ей пара не нужна. Следовательно, минимально количество цифр, которые нужно добавить, это две.

Пример: 2232**5**302420352**3**22.

Ответ. 2232**5**302420352**3**22

5. В помещении банка находятся 12 сейфов, стоящих в ряд. Три сотрудника банка открывают три соседних сейфа, и в средний открытый сейф кладется слиток золота. У грабителя имеется шесть одинаковых устройств-детекторов, которые могут определить, открывался сейф или нет. Может ли он заранее разместить эти детекторы на сейфах так, чтобы после ухода сотрудников банка по показаниям этих устройств определить, где лежит слиток золота?

Решение. Первый способ. Расположение детекторов должно быть таким:

с с д д д с с д д д с с

(с – сейф без детектора, д – сейф с детектором). Поскольку при таком расположении нет трёх подряд идущих сейфов без детектора, то хотя бы один из детекторов сработает. Рассмотрим варианты.

Если сработал один детектор, то открыли сейф со сработавшим устройством и два соседних сейфа без детектора.

Если сработали два детектора, то открыли эти сейфы и соседний с ними, без детектора.

Если сработали три детектора, то открывали эти сейфы.

Определив тройку сейфов, которые открывали, выбираем средний из них.

Второй способ. Расположение детекторов должно быть таким:

с д с д с д с д с д с д

(с – сейф без детектора, д – сейф с детектором). Поскольку при таком расположении нет трёх подряд идущих сейфов без детектора, то хотя бы один из детекторов сработает. Рассмотрим варианты.

Если сработал один детектор, то открыли сейф со сработавшим устройством и два соседних сейфа без детектора.

Если сработали два детектора, то открыли эти сейфы и сейф без детектора, расположенный между ними.

Определив тройку сейфов, которые открывали, выбираем средний из них.

Ответ. Да, можно определить, где лежит слиток.

6. Города A, B, C вместе с соединяющими их прямыми дорогами образуют треугольник. Известно, что прямой путь из A в B на 200 км короче, чем объезд через C , а прямой путь из A в C на 300 км короче, чем объезд через B . Найдите расстояние между городами B и C .

Решение. Рассмотрим путь из B в C через A , $B - A - C$. Длина отрезка BA на 200 км меньше длины пути $B - C - A$, а длина отрезка AC на 300 км меньше длины пути $A - B - C$. Поэтому такой путь окажется на 500 км короче пути $B - C - A - B - C$. (Обходим треугольник ABC и еще один раз сторону BC .) Но этот путь отличается от пути $B - A - C$ на два отрезка BC . Поэтому длина отрезка BC вдвое меньше, чем 500 км, т.е. 250 км.

Ответ. 250 км.