Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

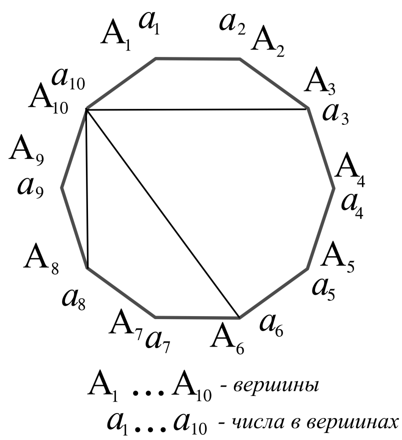
Муниципальный этап

2023-2024 уч.год

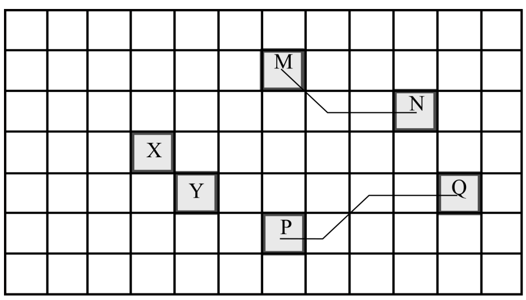
10 класс

Задание размещено на двух листах

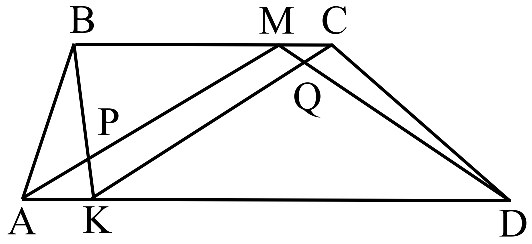
1. Можно ли так расставить натуральные числа в вершинах правильного десятиугольника, чтобы были выполнены два правила:
– любые два числа, стоящие в соседних вершинах, т.е. в вершинах, соединенных стороной, имели бы общий делитель;
– любые два числа, стоящие в вершинах, соединенных какой-либо диагональю, не имели бы общих делителей, больших единицы?



2. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдутся две клетки какого-то одного цвета, расстояние между которыми по сетке не больше одной клетки.
Расстоянием на сетке между клетками A и B назовем количество промежуточных клеток, которые нужно пройти, двигаясь по самому короткому пути из A в B. На рисунке показаны клетки X и Y, расстояние между которыми равно 0; клетки M и N, расстояние между которыми равно 2; клетки P и Q, расстояние между которыми равно 3. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону (соседние по вертикали или горизонтали) или общую вершину (соседние по диагонали).



3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. На основаниях отмечены произвольные точки K и M, см. рисунок. Отрезок AM пересекает отрезок BK в точке P, отрезок DM пересекает отрезок CK в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников ABP и CDQ равна площади четырехугольника $KPMQ$.



4. Решите систему уравнений, считая x и y натуральными (целыми положительными) числами

$$\begin{cases} \text{НОД}(x, y) + 143x = 2009 \\ \text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y) + 3y = 2023 \end{cases}$$

5. Пусть $a > 0, b > 0, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{3a+2} + \sqrt{3b+2} + \sqrt{3c+2} \leq 3\sqrt{3}$$

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!