

1. «Самодельная тепловая машина»

Ваня изучал тепловые двигатели и решил сделать свой собственный. В качестве топлива он использовал парафин. Оказалось, что при работе машины парафин частично вытекал из резервуара, из-за чего рассчитанный КПД оказался неверным. Какая часть вылилась до усовершенствования установки (парафин больше не выливался), если начальный КПД был равен 15%? Какой реальный КПД Ваниного двигателя? Удельная теплота сгорания парафина равна $11,2 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$. Масса сгоревшего парафина равна 66 мг.

Возможное решение:

Если из бака вытекла какая-то часть топлива, то она не учитывалась в расчёте КПД.

$$\eta_1 = \frac{A_{\text{п}}}{(1-k) \cdot Q}; \eta_2 = \frac{A_{\text{п}}}{Q} = \frac{F \cdot s}{m \cdot q} = \frac{5 \text{ Н} \cdot 20 \text{ м}}{66 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot 11,2 \cdot \frac{10^6 \text{ Дж}}{\text{кг}}} = 13,5\% \Rightarrow 1 - k = \frac{\eta_2}{\eta_1} \Rightarrow k = 0,1.$$

Система оценивания задачи:

- 1) Отмечено, что если из бака вытекла какая-то часть топлива, то она не учитывалась в расчёте КПД – **2 балла**
- 2) Рассчитан реальный КПД η_2 – **3 балла**
- 3) Верно показан учет вытекшей части топлива в расчете η_1 – **2 балла**
- 4) Рассчитана вылившаяся часть топлива – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Тактика бега»

У опытного бегуна Феди с самого начала была какая-то тактика: в забеге на 3 км он бежал всё время быстрее своего соперника Гриши ровно в 1,2 раза.

Гриша бежал эту дистанцию в первый раз и не рассчитал свои силы, поэтому первую половину дистанции бежал с постоянной скоростью $4\frac{м}{с}$, а потом начал равномерно замедляться, пока совсем не остановился на финише. Найдите:

- 1) время прохождения Гришей всей дистанции;
- 2) время после начала забега, через которое расстояние между Гришей и Федей было равно 20 м.

Результаты забега объявляют на финише, поэтому все бегуны ждут окончания забега на линии финиша. Стартовали бегуны одновременно.

Примечание: известно, что если построить график скорости от времени, площадь под этим графиком за выбранный промежуток времени будет равна пройденному пути за этот промежуток.

Возможное решение:

Пусть t – время прохождения Гришей дистанции, а t_0 – время, за которое он пробежал первую половину дистанции со скоростью $v_0 = 4\frac{м}{с}$. Вся дистанция – S . По свойству, указанному в примечании, получим:

$$S = v_0 * t_0 + \frac{v_0}{2}(t - t_0) \Rightarrow t = 3t_0 = \frac{3S}{2v_0} = \frac{9000м}{8\frac{м}{с}} = 1125 \text{ с}, t_0 = 375 \text{ с}.$$

Федя относительно Гриши до момента t_0 будет бежать равномерно и прямолинейно со скоростью $v_2 = 1,2v_0 - v_0 = 0,2v_0$, а потом так же равномерно замедляться.

Но Федя пробежит дистанцию быстрее Гриши, так как его скорость всегда больше, поэтому на финише Федя окажется раньше Гриши.

Сначала Федя удаляется от Гриши. Найдём время, за которое он удалится на 20 м от Гриши, двигаясь со скоростью $0,2v_0$. $t_1 = \frac{S_1}{0,2v_0} = \frac{20м}{0,2*4\frac{м}{с}} = 25 \text{ с}$. Это время меньше t_0 , значит, действительно Федя удалился до момента начала замедления от Гриши на это расстояние в первый раз через t_1 после начала забега.

Второй раз Федя и Гриша были на расстоянии 20 м уже перед самым финишем Гриши, так как Федя стоял на финише и ждал результатов.

Поскольку замедляется Гриша равномерно, можно найти скорость его замедления из графика $a = \frac{v_0}{2t_0}$.

Пусть t'_2 – время до финиша Гриши, за которое он пробежит оставшиеся 20 м дистанции.

Скорость в момент времени, когда между Гришей и Федей снова было расстояние 20 м можно найти тогда так:

$$v_2 = at'_2$$

Тогда по свойству графика скорости от времени получим, что

$$S_1 = \frac{v_2}{2}t'_2 = \frac{at'^2_2}{2} = \frac{\frac{v_0}{2t_0}t'^2_2}{2} \Rightarrow t'_2 = \sqrt{\frac{4S_1t_0}{v_0}} = 87 \text{ с}$$

Следовательно, $t_2 = t - t'_2 = 1038 \text{ с}$ – время после старта, через которое Гриша во второй раз будет на расстоянии 20 м от Федеи.

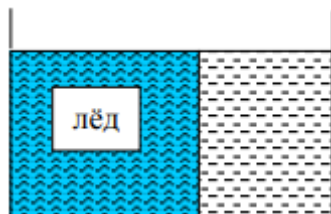
Система оценивания задачи:

- 1) Верно построен график скорости Гриши от времени или написано уравнение, выражающее путь Гриши от времени – **1 балл**
- 2) Найдено время, за которое Гриша пройдет всю дистанцию – **1 балл**
- 3) Найдено время, через которое Федя в первый раз будет на расстоянии 20 м от Гриши – **2 балла**
- 4) Найдена скорость замедления Гриши на втором участке пути – **2 балла**
- 5) Показано, что Гриша и Федя второй раз будут находиться на расстоянии 20 м друг от друга около финиша – **2 балла**
- 6) Найдено время t_2 – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Эксперименты с водой»

Коля взял сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда с примерзшим к его стенкам и дну куском льда и залил сладкой водой так, как показано на рисунке. Какая часть объёма была занята обычным льдом, если уровень воды и льда изначально одинаков, а после таяния льда гидростатическое давление на дно изменилось на 8 процентов? Атмосферное давление не учитывать. Начальная плотность сладкой воды $1250 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность льда $900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Ответ округлите до целых.



Возможное решение:

$\rho_1 = 1250 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $\rho_0 = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; ρ_2 – плотность смеси после таяния льда.

После таяния льда общий объем уменьшится, следовательно, уменьшится высота жидкости. Так как плотность жидкости вырастит непропорционально падению высоты, давление на дно упадет на 8%.

Пусть h_1 – начальная высота жидкости, h_2 – конечная высота смеси.

Масса воды не изменилась, значит ее объем станет равен $V = V_0 * \frac{\rho_0}{\rho}$, где ρ – плотность воды.

Пусть $k = \frac{V_0}{V_0 + V_1}$ – та часть целого объема, который занимал лед изначально, V_1 – объем сладкой воды,

V_0 – объем льда. Тогда $V_1 = (\frac{1}{k} - 1)V_0$; $S_0 = k * S$; $h_1 = \frac{V_0}{S_0}$, $h_2 = \frac{V_2}{S}$, $S = S_1 + S_0$ – площадь дна общая, S_1 – площадь дна под сладкой водой, S_0 – площадь дна под льдом.

По определению средней плотности получим $\rho_2 = \frac{V_0 * \rho_0 + V_1 * \rho_1}{V_2}$.

$$p_1 = \rho_1 * g * h_1; p_2 = \rho_2 * g * h_2; p_1 - p_2 = 0,08 p_1 \Rightarrow p_2 = (1 - 0,08) p_1 \Rightarrow$$

$$\rho_2 * g * h_2 = (1 - 0,08) \rho_1 * g * h_1 \Rightarrow$$

$$\frac{V_0 * \rho_0 + V_0 (\frac{1}{k} - 1) * \rho_1}{V_2} * \frac{V_2}{S} = (1 - 0,08) \rho_1 * \frac{V_0}{k * S} \Rightarrow$$

$$\rho_0 + \left(\frac{1}{k} - 1\right) * \rho_1 = \frac{(1 - 0,08) \rho_1}{k} \Rightarrow$$

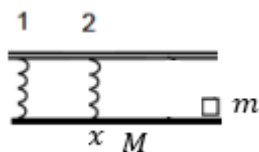
$$\rho_0 - \rho_1 = -\frac{0,08 \rho_1}{k} \Rightarrow k = 0,08 * \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0} = 3,6$$

Система оценивания задачи:

- 1) Показано, что давление на дно упадет – **1 балл**
- 2) Выражен объем воды через объем льда – **1 балл**
- 3) Выражен объем сладкой воды через объем льда – **1 балл**
- 4) Выражено давление до таяния и после через формулу гидростатического давления – **2 балла**
- 5) Выражена средняя плотность после таяния – **2 балла**
- 6) Найдена величина k – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. Жёсткий тяжелый стержень висит на двух пружинах, одна из которых прикреплена к краю стержня. На другой край положен перегрузок m . К какой точке стержня (x) необходимо присоединить вторую пружину, чтобы стержень находился в горизонтальном положении в равновесии? Жесткости пружин отличаются втрое. Масса стержня M , жёсткость одной из пружин равна k . Длина стержня равна l .



Возможное решение:

Так как не сказано, какая пружина в три раза жестче какой, будет два случая:

I: $k_1 = 3k_2$

II: $3k_1 = k_2$

Так как стержень будет горизонтален, растяжение обеих пружин будет одинаково:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$$

Так как система в равновесии, все силы, действующие на стержень, скомпенсированы и сумма моментов всех сил относительно любой выбранной оси тоже будет равна нулю.

$$k_1 * \Delta x + k_2 * \Delta x = m * g + M * g$$

Относительно оси, проходящей через левый край стержня сумма моментов будет выглядеть так:

$$k_2 * \Delta x * x = M * g * \frac{l}{2} + m * g * l$$

Откуда легко выражается $x = \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right) * l}{(M + m) * \frac{k_2}{k_2 + k_1}}$

Для случая I: $x = \frac{4 * \left(\frac{M}{2} + m\right) * l}{M + m}$

Для случая II: $x = \frac{4 * \left(\frac{M}{2} + m\right) * l}{3 * (M + m)}$

Система оценивания задачи:

- 1) Показано, что растяжение пружин будет одинаковое – **2 балла**
- 2) Записано правило сил (Второй закон Ньютона) – **2 балла**
- 3) Записано правило моментов – **2 балла**
- 4) Выражен x в общем виде – **2 балла**
- 5) Найден случай I. – **1 балл**
- 6) Найден случай II – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов