КОД М110488

1	2	3	4	Σ
7	7	0	7	21

№1

Ответ: да, существует.

Пример: $P(x) = x^2 + 2023\cdot 2x + 2023^2\cdot 2$

Проверим пример:

Пойдем от противного, пусть ~~не~~ нашелся такой x_0, что

$P(x_0) < 2023\cdot P'(x_0)$, тогда

$x_0^2 + 2023\cdot 2x_0 + 2023^2\cdot 2 < 2023(2x_0 + 2023\cdot 2)$

$x_0^2 + 2023\cdot 2x_0 + 2023^2\cdot 2 < 2023\cdot 2x_0 + 2023^2\cdot 2$

$x_0^2 + 2023\cdot 2x_0 - 2023\cdot 2x_0 + 2023^2\cdot 2 - 2023^2\cdot 2 < 0$

$\underbrace{x_0^2 < 0}_{\text{~~невозвом~~}}$

невозможно => такого x_0 не существует => => пример корректен.

№2

Ответ: номер 25.

Решение: Заметим, что из-за того, что Алексей идёт по одной стороне улицы номер каждого следующего дома всегда на 2 больше номера предыдущего. Таким образом дома образуют арифметическую прогрессию.

Пусть x - номер дома Алексея, k - кол-во домов, сумму номеров которых посчитал Алексей.

Сумма номеров является суммой арифметической прогрессии, тогда

$$\left(x+(k-1)\cdot 2+x\right)\frac{k}{2}=391$$

$$(x+k-1)k=391.$$

Так как $x\geq 1$, то $x+k-1\geq k$.

Заметим, что 391 имеет всего 4 натуральных делителя: 1; 17; 23; 391.

КОД М110488

№2 (продолжение)

Тогда у нас всего 2 варианта представить произведение $(X+k-1)k = 391$, это:

$k = 1; (X+k-1) = 391$ или

$k = 17; (X+k-1) = 23$

Но k не может быть равно 1 (как минимум, Павл и Алексей живут в разных домах), тогда остается только вариант $k = 17$ и $(X+k-1) = 23$

$$\left.\begin{matrix} X+k-1=23 \\ k=17 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X+17-1=23 \Rightarrow X=7$$

Итак, номер 10-го дома будет равен $7+(10-1)\cdot 2 = 25$.

№4

Д-во: Пронумеруем лунки от 0 до 9 по часовой стрелке. ~~Соседние~~ 2 соседние лунки имеют разную чётность номера.

Без ограничения общности, предположим изначально ~~не~~пустой лунку под ~~номером~~ номером 0. Посмотрим на сумму кол-в камней в чётных лунках и нечётных. Изначально в лунках с чётными номерами $4 \cdot 11 = 44$ камня, с нечётными — $5 \cdot 11 = 55$.

Посмотрим как меняется чётность этих сумм после операции:

Из суммы лунок с нашей чётностью изначально вычитается 6, затем в сумму лунок с противоположной чётностью прибавляется 1, затем в сумму лунок с нашей чётностью прибавляется 2, затем в сумму с противо~~воло~~положной прибавляется 3

КОД М110488

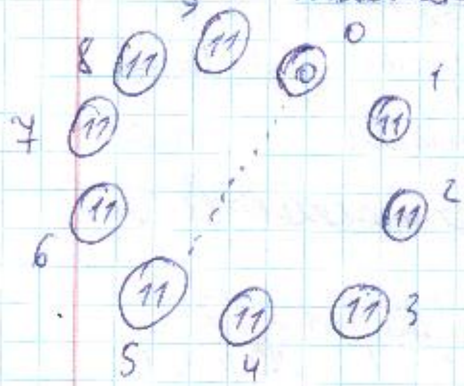
№4(продолжение)

~~Всего~~ В итоге, после операции из суммы количеств камней, лежащих в лунках с нашей чётностью вычитается 4, а в сумму с противоположной прибавляется 4. Таким образом, ни одна из сумм не меняет своей чётности в процессе операций. Однако посмотрим на финальную картину. Лунка 5 - пустая (она лежит напротив 0), значит сумма количеств камней в ~~чётных~~ лунках с чётными номерами равна 5·11=55, тогда как в лунках с нечётными номерами сумма равна 4·11=44. Чётности ~~пон~~ сумм поменялись, но это невозможно, поэтому невозможно получить такое ~~кол~~ расположение камней. ч.т.д.

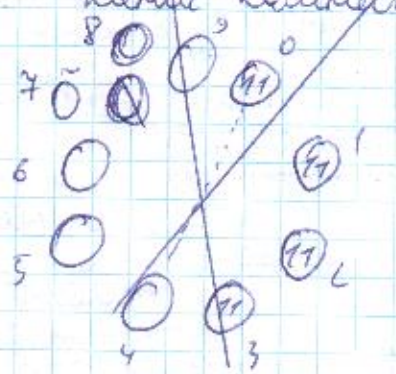
75

№ 4 (продолжение)

Изначальное положение камней:



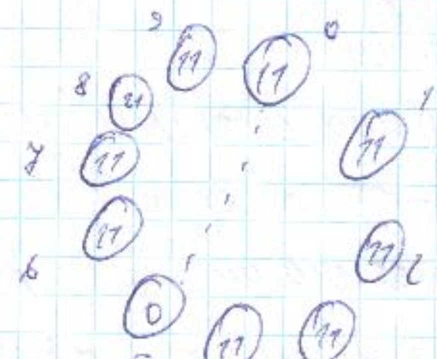
Финальное положение камней:



Сумма кол-в в четных: 44

Сумма кол-в в нечетных: 55

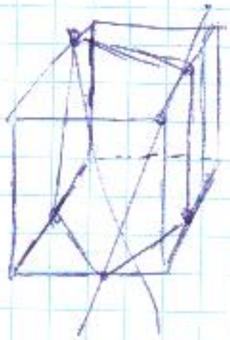
Финальное положение камней



Сумма кол-в в четных: 55

Сумма кол-в в нечетных: 44

N3



КОД М110496

1	2	3	4	Σ
7	7	7	0	21

1. рассмотрим следующий многочлен: $P(x) = x^2 + bx + c$, в котором b и c - действительные числа. Тогда $P'(x) = 2x + b$ и предположим, что для него выполняется неравенство $P(x) \geq 2023 \cdot P'(x)$, тогда получим:

$$x^2 + bx + c \geq 2023 \cdot 2x + 2023b;$$
$$x^2 + (b-4046)x + c - 2023b \geq 0$$

Введем функцию $f(x) = x^2 + (b-4046)x + c - 2023b$

~~Она больше~~ ее значения ≥ 0 при любом x, когда в ~~квадратном~~ уравнении $x^2 + (b-4046)x + c - 2023 = 0$ дискриминант принимает не положительные значения (т.к. ~~т.к. ко~~ старший коэффициент в функции > 0, а графиком является парабола, то ветви смотрят вверх, а если корней в уравнении $f(x) = 0$ не более 1 т.е. $D \leq 0$, то $f(x) \geq 0$ при любом x).

• Найдем коэффициенты, при которых ~~D~~ дискриминант уравнения $x^2 + (b-4046)x + c - 2023b = 0$ меньше, либо равен нулю.

• $x^2+(b-4046)x+c-2023b=0$

$D=(b-4046)^2-4(c-2023b)$

поставим условие: $D\le 0$

$(b-4046)^2-4(c-2023b)\le 0$

при $b=4046$ и $c=2023^2\cdot 2$

$D=0$, т.е. ~~уравнение~~ уравнение $f(x)=0$

имеет 1 корень, а значит

$f(x)\ge 0$ при любых x, а

значит многочлен $P(x)=x^2+4046x+2023^2\cdot 2$

при любых x соответствует неравенству

$P(x)\ge 2023\cdot P'(x)$

Проверка:

$x^2+4046x+2023^2\cdot 2\ge 2023(2x+4046)$

$x^2+4046x+2023^2\cdot 2\ge 4046x+2023^2\cdot 2$

$x^2\ge 0$

Ответ: да, существует

$P(x)=x^2+4046x+2023^2\cdot 2.$

2. Знаем, что на одной стороне улицы ~~дома имеют~~ номера домов имеют одинаковую четность, т.к. Леша, посчитав сумму номеров домов, получил нечетное число, значит они с Пашей живут на стороне улицы с нечетными номерами домов. ~~Пусть дом Вовы имеет номер n, т.к. каждый следующий дом на 1 улице нечетный имеет номер на 2 больше предыдущего, то если Леша~~ т.к. ~~номер каждый следующий дом на 1 стороне улицы больше на 2 т~~

т.к. на номер каждого следующего дома на 2 больше предыдущего, то сумма номеров домов от Лешиного до Пашиного — сумма членов арифметической прогрессии, где (пусть a — номер дома Леши, а k — количество домов ~~он~~ которые посчитал Леша) a — первый член, а $a + 2(k-1)$ — последний, а 2 — разность любых рядом стоящих членов.

Тогда зная сумму арифметической прогрессии

$$391 = \frac{2a + 2(k-1)}{2} \cdot k\ ;\quad 391 = (a+k-1)\cdot k.$$

391 раскладывается на множители как $17 \cdot 23$ т.е.

либо $k=17$ либо $k=23$

1) Пусть $k=17$, тогда $a+k-1=23$,

$a=7$, номер желтого дома, считая от дома Маши, $= 7+(10-1)\cdot 2 = 7+9\cdot 2 = 25$

2) пусть $k=23$, тогда

$a+k-1=17$

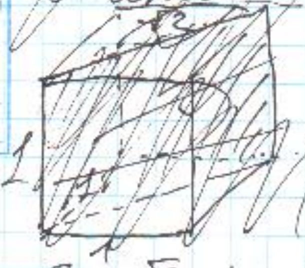
$a+22=17$

$a=-5$, чего не может быть т.к. a — номер дома, т.е. натурал.

Ответ: 25.

КОД M110496

~~№3. пусть сторона куба 1. самое большое по площади сечение в кубе: ?~~



~~и оно равно $\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$.~~

~~т.к. сечение - пятиугольник, то одна из вершин куба встроена этого пятиугольника.~~

~~Так как в куба~~

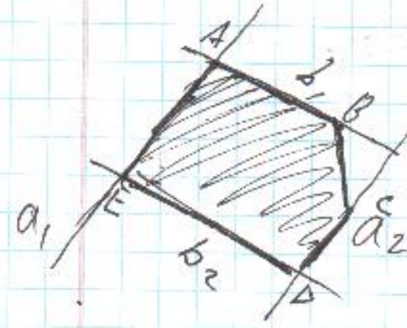
3. пусть ~~данны~~ сечение куба - ABCDE. Очевидно что среди пяти сторон данного многоугольника найдутся 2 пары, находящиеся на противоположных гранях куба (всего граней 6, а на 1 грани не ~~может~~ может быть 2 стороны многоугольника) значит данный ~~на~~ пятиугольник имеет 2 пара

противоположные грани ||

Параллельных сторон, пусть

эти 4 стороны лежат на прямых

$a_1 \parallel a_2$ и $b_1 \parallel b_2$



~~тогда точками~~

продолжив прямые, на которых лежат параллельные стороны, получим параллелограм, площадь которого больше площади многоугольника.

!~~Заметим, что большая сто необходимо~~

~~одна~~ из пар одна из параллельных сторон является первой или второй по длине среди остальных (~~4 параллельные~~ 2 пары параллельных из всех 5), а одна из параллельных

~~площадь параллелограмма с AE ED~~ ~~AED~~

сторон из другой пары точно является стороной получившегося параллелограмма т.к. она либо наибольшая из этой пары, либо ~~они равны~~, эта пара равных сторон.

Т.е. в получившемся параллелограмме 2 непараллельные стороны также являются сторонами

~~пятиугольника в сечении. (При этом одна из данных сторон не обязана быть одной из 2ух самых длинных)~~
~~S данного параллелограма = произведение данных сторон на sin угла между ними, а т.к. sin синус угла параллелограма $\in (0;1]$, то произведение этих сторон $\geq$ S параллелограма, а т.к. S параллелограма > S пятиугольника в сечении то доказано, что произведение 2ух самых длинных сторон пятиугольника больше его площади.~~

• Мы продолжили те стороны из пар параллельных сторон, которые не пересекаются, а те которые пересекаются ~~больше~~ соответственно больше тех, которые мы продолжили, поэтому будут являться сторонами получившегося параллелограма.

• S параллелограма = произведение данных сторон на синус угла между ними, а т.к. синус угла параллелограма $\in [0; 1]$ то $S_{▱} \leq$ произведение этих сторон, а значит $S_{⬠} <$ произведение этих сторон.

а то, что эти стороны — стороны пятиугольника я доказал.

Доказано!