M110326

№1

Допустим записаны числа a, b, c, d, e; причём $a \le b \le c \le d \le e$.

Всего различных пар чисел мы можем получить $C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.

Если положительным будет только e, то мы получим от 0 до 4 пар положительных сумм (a, b, c, d будут меньше $0 \Rightarrow$ их суммы всегда меньше 0). Следовательно d тоже больше нуля. Аналогичные рассуждения работают и с числами a и b, только тут $a<0$ и $b<0$.

Рассмотрим 2 случая: $c>0$ и $c<0$. (будем в таблице указывать знаки произведения, считается, что $a \le b < 0$, $0 < d \le e$)

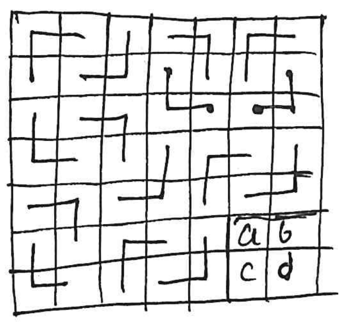
произведения	$c>0$	$c<0$
ab	+	+
ac	−	+
ad	−	−
ae	−	−
bc	−	+
bd	−	−
be	−	−
cd	+	−
ce	+	−
de	+	+
кол-во +	4	4
кол-во −	6	6

Видно, что независимо от c, мы получаем 4 положительных произведения и 6 отрицательных.

Ответ: 4 положительных и 6 отрицательных.

№2

Будем заполнять квадрат 7×7 объединяя каждое число в какой-нибудь треугольник:



Видно, что для доказательства положительности суммы всех чисел, нужно доказать, что квадрат 2×2 в нижнем правом углу даст положительную сумму. Обозначим числа в нем как a, b, c и d.

Из условия понятно, что
$$\begin{cases} a+b+d>0 \\ b+d+c>0 \\ d+c+a>0 \\ c+a+b>0 \end{cases}$$

Сложим все эти неравенства:

$a+b+d+b+d+c+d+c+a+c+a+b>0$

$3(a+b+c+d)>0$

$a+b+c+d>0$ => сумма этого квадрата больше 0, тогда сумма всех чисел больше нуля всегда.

Ответ: Да, обязательно.

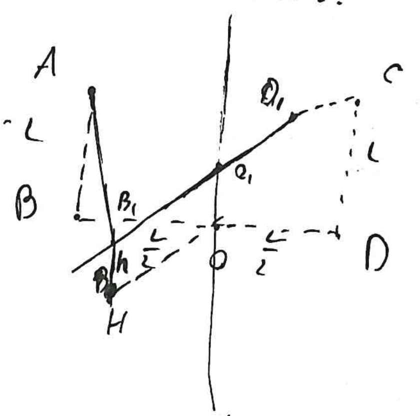
№3

В начальный момент времени балка висела как на рисунке 1.

рисунок 1.

Затем его повернули вокруг вертикальной оси. Обозначим за O середину балки.

рисунок 2.



На рисунке 2 показано пунктирной линией начальное положение балки, а сплошной — конечное.

A, C — точки крепления канатов к потолку. B, D — точки крепления канатов к балке в начальный момент, а B_1, D_1 — в конечный.

OO_1 — ось вращения.

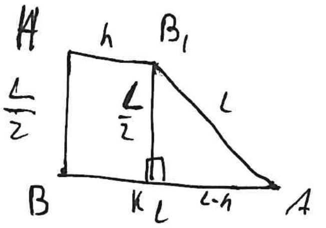
Опустим перпендикуляры из B_1 и O_1 на плоскость, в которой находилась балка в начальный момент и которая перпендикулярна AB и CD. Обозначим эту плоскость за α.

$H = \Pi p_{\alpha}^{\perp} B_1$ и $O = \Pi p_{\alpha}^{\perp} O_1$.

B_1H — высота на которую поднялась балка. Обозначим её за h.

$OH = B_1O_1 = BO$, $\angle BOH = 60°$ $\Rightarrow$ ΔBOH — равносторонний $\Rightarrow$ $BH = BO = \frac{L}{2}$

Рассмотрим трапецию HB_1AB:



$AB = AB_1 = L$ (канат не изменил своей длины)

$BH = \frac{L}{2}$

$HB_1 = h$.

Опустим из B_1 перпендикуляр B_1K на AB.

$B_1K = BH = \frac{L}{2}$ $\quad KA = AB - HB_1 = L - h$.

По Т. Пифагора для ΔAB_1K:

$$L^2 = (L-h)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\cancel{L^2} = \cancel{L^2} - 2Lh + h^2 + \frac{L^2}{4}$$

$$h^2 - 2Lh + \frac{L^2}{4} = 0$$

$$D = 4L^2 - L^2$$

$$h = \frac{2L \pm \sqrt{4L^2 - L^2}}{2}$$

Если $h = \frac{2L + \sqrt{4L^2 - L^2}}{2}$, то $h > L$ $\Rightarrow$ этот вариант невозможен

$$h = \frac{2L - \sqrt{4L^2 - L^2}}{2}$$

Ответ: $\frac{2L - \sqrt{4L^2 - L^2}}{2}$

M110 326

№4

$\sin\alpha > 0 \qquad \sin 3\alpha > \frac{1}{4}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\sin\alpha = x$

$3x - 4x^3 > \frac{1}{4} \quad |\cdot 4$

$12x - 16x^3 - 1 > 0$

$\cancel{x < \frac{1}{8}}$

$\cancel{x > \frac{1}{12}}$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ \times\ 324 \\ \hline 5184 \\ 2592 \\ 888 \\ \hline 419904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 419904 \\ \times\ 3 \\ \hline 1259712 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 109 \\ \times\ 109 \\ \hline 981 \\ 109 \\ \hline 11881 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11881 \\ \times\ 109 \\ \hline 106929 \\ 11881 \\ \hline 1295029 \end{array}$$

подставим $x = \frac{109}{1296}$ в $3x - 4x^3 - \frac{1}{4} > 0$

$3 \cdot \frac{109}{1296} - \frac{4 \cdot 109^3}{1296^3} - \frac{1}{4} > 0$

$\frac{109}{432} - \frac{109^3}{1296^2 \cdot 324} - \frac{1}{4} > 0$

$432 = 4 \cdot 108 \Rightarrow \frac{109}{432} - \frac{1}{4} = \frac{1}{432}$

$(324 \cdot 1296 \cdot 3$

$\frac{1}{432} > \frac{109^3}{1296 \cdot 1296 \cdot 324}$

$324 \cdot 1296 \cdot 3 > 109^3$ т.к знаменатели теперь равны после домножения левой части.

$1259712 > 1295029$

такого быть не может $\Rightarrow x > \frac{109}{1296} \Rightarrow \sin\alpha > \frac{109}{1296}.$