M80268

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
(2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД)
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

№ 1

Найдем произведение чисел $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Получаем:

$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\cancel{2}(a+b)}{\cancel{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\boxed{\frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$ Упростим выражение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Выходит:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}^{\backslash b}+\frac{1}{b}^{\backslash a}=\frac{a+b}{ab}$

Подставим $\frac{a+b}{ab}$ в выражение:

$\frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{\frac{a+b}{ab}}=(a+b):\frac{a+b}{ab}=(a+b)\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{ab(a+b)}{(a+b)}=ab.$

Значит, произведение этих чисел не будет меняться от количества дней (даже от 2022-го), и будет равно $a\cdot b$. По условию задачи $a=1$; $b=2021$. Тогда $a\cdot b=1\cdot 2021=2021$. Заметно, что ~~про~~ $a\cdot b$ – константа.

Ответ: 2021.

№2

Пусть Буратино закопал x монет, через неделю стало y монет, а через две недели – z монет. По условию задачи составим таблицу кол-ва золотых и серебряных монет, и соотношение по процентам:

	Количество, %		Объём от всего	
	золотые	серебр.	золотые	серебр.
посажено	60	100-60= =40	$\frac{3}{5}x$	$\frac{2}{5}x$
через неделю	20	100-20= =80	$\frac{1}{5}y$	$\frac{4}{5}y$
через две недели	60	40	$\frac{3}{5}z$	$\frac{2}{5}z$

По условию задачи, через неделю добавились серебряные монеты, тогда кол-во золотых монет не изменилось. (Следовательно,)

M80268

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
(2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД)
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

№ 2.

Следовательно, $\frac{3}{5}x = \frac{1}{5}y$. Решим уравнение:

$\frac{3}{5}x = \frac{1}{5}y \,\Big|\cdot 5$ (если умножить обе части ур-ния на одно и то же отличное от нуля число, то получим ур-ние, равносильное данному)

$3x = 1y$

$3x = y$.

Значит, количество монет через неделю увеличилось в 3 раза.

Через 2 недели увеличилось число золотых монет, ~~то~~ значит количество (~~золотых мон~~) серебряных монет не изменилось, тогда $\frac{4}{5}y = \frac{2}{5}z$.
Решим ур-ние:

$\frac{4}{5}y = \frac{2}{5}z \,\Big|\cdot \frac{5}{4}$

$y = \frac{1}{2}z$.

Подставим значение y в уравнение $3x = y$:

$3x = y$

$3x = \frac{1}{2}z \,\Big|\cdot 2$

$6x = z$.

Значит, через 2 недели кол-во монет увеличится в 6 раз

Ответ: в 6 раз.

M80268

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
(2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД)
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

№ 3.

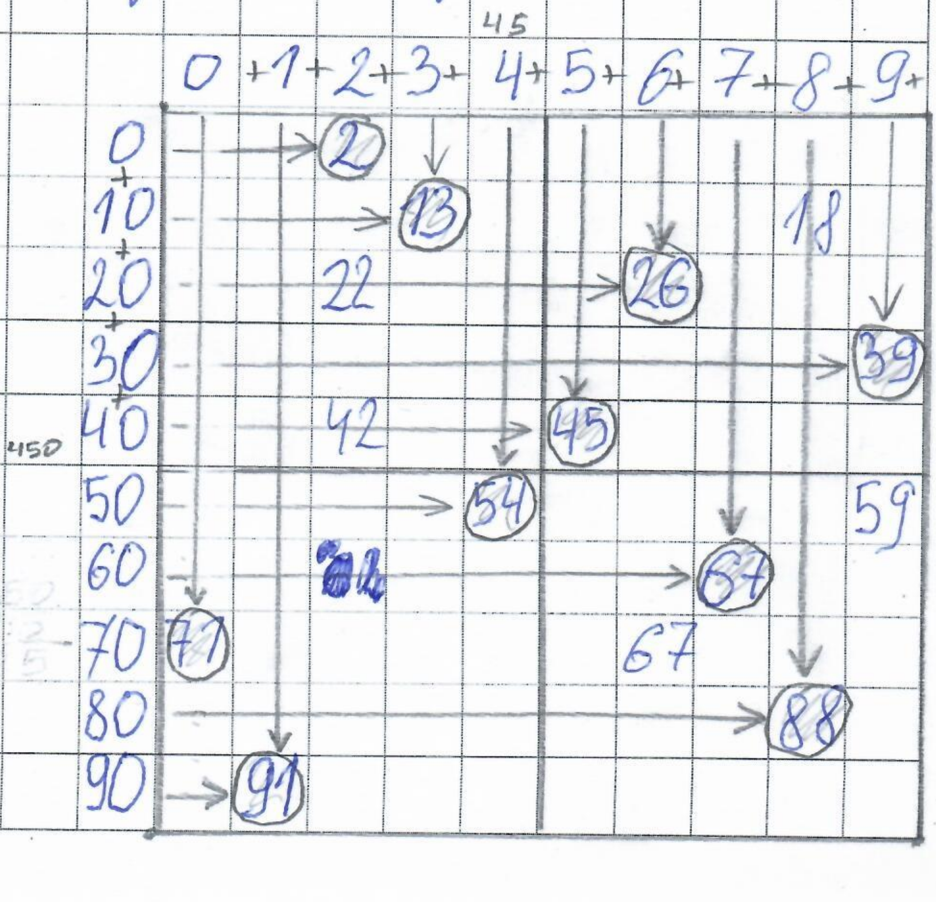
Можно представить ряды чисел по другому: в первом столбце $10\cdot0+0$, $10\cdot0+1$...; во втором $10\cdot1+0=10$; $10+1=11$; в третьем $10\cdot2+0=20$; $10\cdot2+1=21$ и т.п. То есть, чтобы найти число по столбцу и строчке, надо номер ~~столбца~~ строчки (начиная с 0) умножить на 10, и прибавить номер столбца (тоже с 0). Тогда, если никакие два числа не могут стоять вместе в одной строчке или столбце, то сложить надо все числа все строчки.

Получаем:

Сумма чисел $= 10(0+1+2+...+8+9)+(0+1+2+3...+9)=11(0+1+...+8+9)=$
$=11\cdot45=495$.

В дополнение, данные вычисления я проверил на практике (см. рисунок), и увидел, что сумма чисел - константа.

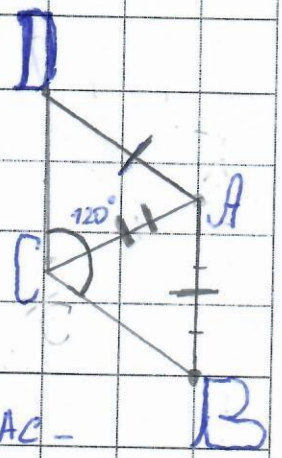
Ответ: 495



М80268

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
(2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД)
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

№ 4



Дано: $ABCD$ - чет-ник, $AB = AD$;
$AD > AC$; $AB > AC$, $\angle C = 120°$

Доказать: $\angle A > 120°$

Доказательство:

1) в треугольнике ACD (далее Δ) сторона AD больше стороны AC. Напротив стороны AD расположен угол DAC, напротив стороны AC – угол D (далее $\angle$). По признаку треугольника (напротив большей стороны больший угол) сформулируем неравенство:

$AD > AC$ (по усл.) $\Rightarrow \angle DCA > \angle D$ (по пр-ку Δ)

2) в ΔABC $AB > AC$ (по условию). Напротив стороны AC – $\angle B$, напротив стороны AB – $\angle C$. По пр-ку тр-ника составим второе неравенство:

$AB > AC$ (по усл.) $\Rightarrow \angle ACB > \angle B$.

3) $\angle C$ состоит из двух углов: $\angle DCA$ и $\angle BCA$, т.е. $\angle C = \angle DCA + \angle ACB$. Совместим всё, что мы нашли:

$\angle ACB > \angle B$
$\angle DCA > \angle D$
$\angle ACB + \angle DCA = \angle C$

Значит, $\angle C > \angle B + \angle D$, т.е. $\angle B + \angle D < \angle C$.

4). $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (по св-ву чет-ника). Тогда $\angle A = 360 - \angle B - \angle C - \angle D$. $\angle C = 120°$, значит, $\angle A = 360 - 120 - (\angle B + \angle C) = 240 - (\angle B + \angle C)$. След-но, $240° - \angle A = \angle B + \angle C$. $\angle B + \angle C < \angle C$, т.е. $\angle B + \angle C < 120°$. Тогда $240 - \angle A < 120°$. Значит, $\angle A > 120°$.

ч.т.д.