ПРИМЕР №1. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{3x^2-16x+16}$

Решение находим с помощью калькулятора.

Так как числитель и знаменатель обратились в нуль при x=4, то 4 – корень обоих многочленов, а значит, каждый из них разлагается на множители, одним из которых будет (x - 4).

Найдем корни первого многочлена:

$x^2 +0x - 16 = 0$

D = 0^2 - 4 • 1 • (-16) = 64

$$x_1=\frac{8}{2\cdot 1}=4$$

$$x_2=\frac{-8}{2\cdot 1}=-4$$

Найдем корни второго многочлена: $3x^2 -16x + 16 = 0$

Дискриминант равен $D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64$

$$x_1=\frac{-(-16)+8}{2\cdot 3}=4$$

$$x_2=\frac{-(-16)-8}{2\cdot 3}=4/3$$

Получаем:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-4/3)}=\frac{(x+4)}{(x-4/3)}=3$$

ПРИМЕР №2. Найти предел:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+4}{-2x^2-3x+5}$$

Решение. Вместо x в числитель и знаменатель подставляем значение -2. Получаем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{-2}{3}=\frac{-2}{3}=-2/3$$

Пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)$$

Разбираемся, что такое $x\to\infty$? Это тот случай, когда x неограниченно возрастает, то есть: сначала $x=10$, потом $x=100$, потом $x=1000$, затем $x=10000000$ и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией $1-x$?

$1-10=-9$, $1-100=-99$, $1-1000=-999$, …

Итак: если $x\to\infty$, то функция $1-x$ стремится к минус бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$$

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию $(1-x)$ бесконечность и получаем ответ.

Еще один пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$$

Опять начинаем увеличивать x до бесконечности и смотрим на поведение функции:

$\text{если} \;\; x = 10, \text{то} \;\; 10^2 - 2 \cdot 10 - 3 = 77$

$\text{если} \;\; x = 100, \text{то} \;\; 100^2 - 2 \cdot 100 - 3 = 9797$

$\text{если} \;\; x = 1000, \text{то} \;\; 1000^2 - 2 \cdot 1000 - 3 = 997997$

...

Вывод: при $x \to \infty$ **функция** $x^2 - 2x - 3$ **неограниченно возрастает**:
$\lim\limits_{x \to \infty}(x^2 - 2x - 3) = \infty$

<u>И еще серия примеров:</u>

Пожалуйста, попытайтесь самостоятельно мысленно проанализировать нижеследующее и запомните простейшие виды пределов:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x - 99} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^4 + x - 9} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{4^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x + 7}} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{12}{\ln x} = 0$

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.

В том случае, если $x \to \infty$, попробуйте построить последовательность $x = 10$, $x = 100$, $x = 1000$. Если $x \to 0$, то $x = 0{,}1$, $x = 0{,}01$, $x = 0{,}001$.

! Примечание*: строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.*

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1000000}{x}$, то все равно $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1000000}{x} = 0$, **так как рано или поздно «икс» начнёт принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом**.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как $\lim\limits_{x \to \infty}(x^4 + 8x + 10) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ **и т.д.**

Более того, у предела есть очень хороший геометрический смысл. Для лучшего понимания темы рекомендую ознакомиться с методическим материалом **Графики и свойства элементарных функций**. После прочтения этой статьи вы не только окончательно поймете, что такое предел, но и познакомитесь с интересными случаями, когда предела функции вообще **не существует**!

На практике, к сожалению, подарков немного. А поэтому переходим к рассмотрению более сложных пределов. Кстати, по этой теме есть **интенсивный курс** в pdf-формате, который особенно полезен, если у Вас ОЧЕНЬ мало времени на подготовку. Но материалы сайта, разумеется, не хуже:

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Пример:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Можно было бы подумать, что $\frac{\infty}{\infty}=\infty$, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Вот оно как, ответ $\frac{2}{3}$, а вовсе не бесконечность.

Что принципиально важно в оформлении решения?

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак $(*)$, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:

$$\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}$$

Для пометок лучше использовать простой карандаш.

Конечно, можно ничего этого не делать, но тогда, возможно, преподаватель отметит недочеты в решении либо начнет задавать дополнительные вопросы по заданию. А оно Вам надо?

<u>Пример 2</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3
Максимальная степень в знаменателе: 4
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4.
Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*) = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}} =$$

$$= \frac{0+0+0+0}{5+0-0-0} = \frac{0}{5} = 0$$

Пример 3

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

Предвосхищаю вопрос от чайников: «Почему здесь деление на ноль? На ноль же делить нельзя!». Смысл записи 0:0 будет понятен позже, после ознакомления с четвёртым уроком о **бесконечно малых функциях**. А пока всем начинающим изучать математический анализ предлагаю читать далее.

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 4

Решить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Если данные вещи позабылись, тогда посетите страницу **Математические формулы и таблицы** и ознакомьтесь с методическим материалом *Горячие формулы школьного курса математики*. Кстати его лучше всего распечатать, требуется очень часто, да и информация с бумаги усваивается лучше.

Итак, решаем наш предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5=0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

! Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.

Далее находим корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители.

$2x^2-3x-5=0$

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$

$\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$

$x_1=\dfrac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\dfrac{3-7}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

$x_2=\dfrac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\dfrac{3+7}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$

$2x^2-3x-5=2(x+1)\cdot\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

<u>Пример 5</u>

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$

Знаменатель:

$x^2+4x-12=0$

$D=16+48=64$

$\sqrt{D}=8$

$x_1 = \dfrac{-4-8}{2} = -6$, $x_2 = \dfrac{-4+8}{2} = 2$

$x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$

$$(*) = \lim_{x \to 2} \frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)} = 2\lim_{x \to 2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)} = 2\lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)} =$$

$$= -2\lim_{x \to 2} \frac{(2+x)}{(x+6)} = -2 \cdot \frac{4}{8} = -1$$

Что важного в данном примере?
Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

Рекомендация: **Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.**
Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела. Зачем? Да просто чтобы они не мешались под ногами. Главное, потом эти числа не потерять по ходу решения.

Обратите внимание, что на заключительном этапе решения я вынес за значок предела двойку, а затем – минус.

! Важно

В ходе решения фрагмент типа $\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x-2}$ *встречается очень часто. Сокращать такую дробь **нельзя**. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*
$\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(-1) = -1$*, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

<u>Пример 6</u>

Найти предел $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела
Еще раз повторяю – это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Как Вы, наверное, заметили, у нас в числителе находится разность корней. А от корней в математике принято, по возможности, избавляться. Зачем? А без них жизнь проще.

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. на $(a+b)$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

То есть, **мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение**.
В известной степени, это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Готово.

Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте? Примерно так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)} =$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

Пример 7

Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$

Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

Окончательное решение примера может выглядеть так:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители:

$$x^2+x-2=0$$
$$D=1+8=9$$
$$\sqrt{D}=3$$
$$x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$$
$$x_2=\frac{-1+3}{2}=1$$
$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение

$$(*)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\overset{\to 2}{\sqrt{x+6}}+2)}{x+6-4}=4\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=$$
$$=4\lim_{x\to -2}(x-1)=4\cdot(-3)=-12$$

Академия,2013.-224с.