Факториал. Понятие и свойство факториала.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называется n-факториалом и обозначается как n! и равен $n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n$

Эту формулу можно записать в следующем виде:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Пример 1
$5!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 =120$

Пример 2
$9!-7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot(8\cdot 9-1)=5040\cdot 71= 357840$

Пример 3

$$\frac{5!}{7!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{1}{42}$$

Примечание
Факториал определён только для целых неотрицательных чисел

Формула Стирлинга, для приближённого вычисления факториала:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}$$

Свойства факториала:

1) Основное свойство (рекурсия): $\mathbf{n!=(n-1)!\cdot n}$
2) Для числа 0 принято соглашение: $0!=1$
3) $n!^{2}\geqslant n^{n}\geqslant n!\geqslant n$

Факториал часто используется в формулах комбинаторики, теории вероятностей и т.д.

Решить следующие задания:

1. $10!=?$
2. $3!=?$
3. $12!=?$
4. $2!\cdot 4!=?$
5. $\frac{12!}{13!}=?$

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин. Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

Правила сложения и умножения в комбинаторике

Правило суммы. Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно n + m способами.

Пример 1.
В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?
Решение
Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек.
По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить 16+10=26 способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n1 способами, второе действие n2 способами, третье – n3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить nk способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.
Пример 2.
В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?
Решение
Первым дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Т.к. в классе учится 16 мальчиков и 10 девочек, то назначить первого дежурного можно 16+10=26 способами.
После того, как мы выбрали первого дежурного, второго мы можем выбрать из оставшихся 25 человек, т.е. 25-ю способами.
По теореме умножения двое дежурных могут быть выбраны 26*25=650 способами.

Сочетания без повторений. Сочетания с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: <u>сколькими способами можно выбрать m из n различных предметов?</u>

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 3.
Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?
Решение

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$$

.

Рассмотрим задачу о числе сочетаний с повторениями: имеется по r одинаковых предметов каждого из n различных типов; сколькими способами можно выбрать m ($m \le r$) из этих (n*r) предметов?

$$\overline{C}_{n}^{m} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

.

Пример 4.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение

Т.к. среди 7 пирожных могут быть пирожные одного сорта, то число способов, которыми можно купить 7 пирожных, определяется числом сочетаний с повторениями из 7 по 4.

$$\overline{C}_{4}^{7} = C_{4+7-1}^{7}\frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

.

Размещения без повторений. Размещения с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?

$$A_{n}^{m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 5.

В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение.

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^{4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Пример 6.

У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера– составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

Решение

Можно считать, что опыт состоит в 5-кратном выборе с возращением одной из 3 цифр (1, 3, 7). Таким образом, число пятизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 5:

$$\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?

$$P_n = n!$$

Пример 7.

Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова«брак»?

Решение

Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак» (б, р, а, к). Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов (k < n), т. е. есть одинаковые предметы.

$$\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Пример 8.

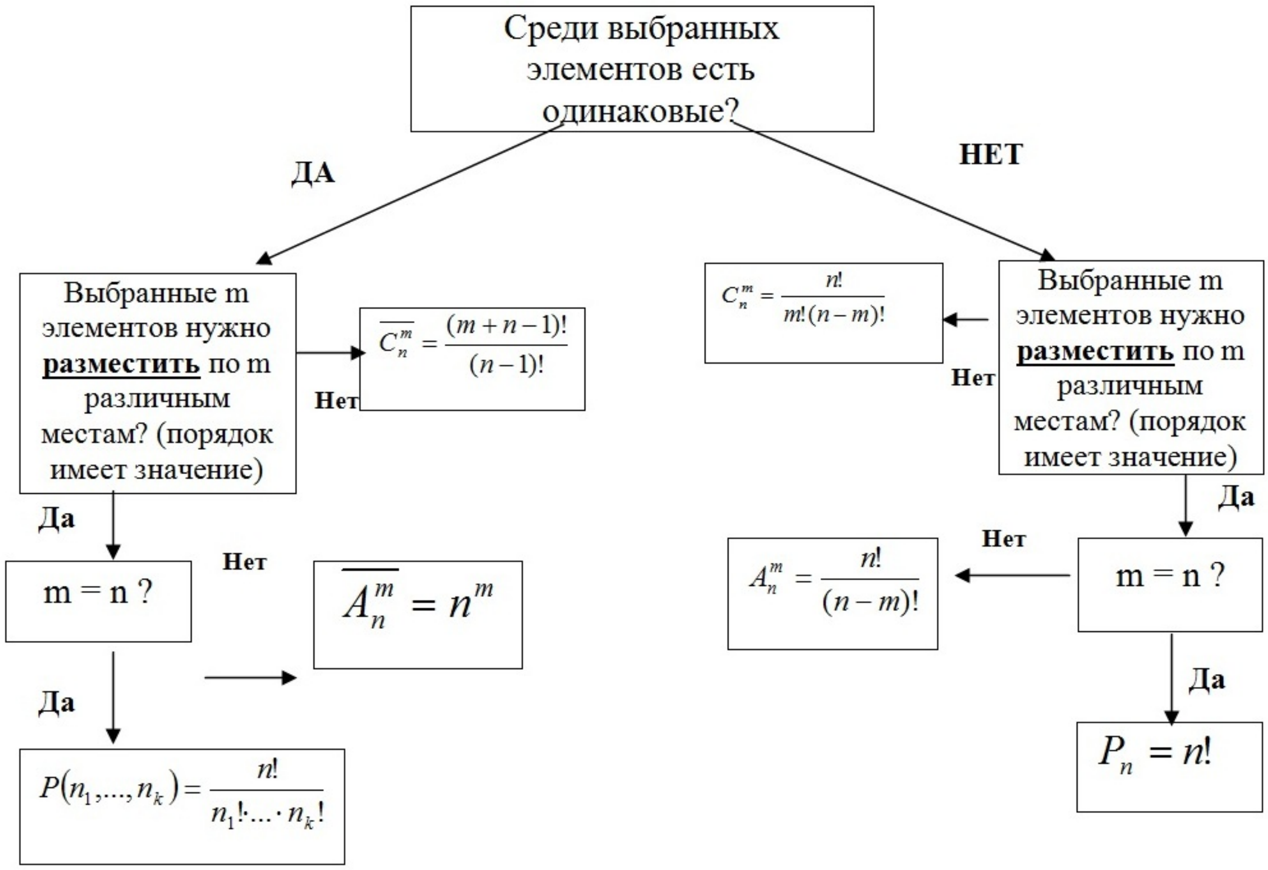
Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Решение

Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв. Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$$\overline{P}_9(1,4,3,1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520.$$

Опорный конспект по разделу «Комбинаторика»



Бином Ньютона. *Это формула, представляющая выражение (a + b)* ^{n} *при положительном целом n в виде многочлена:*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + $$
$$+ C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Заметим, что сумма показателей степеней для a и b постоянна и равна n.

Пример 1.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + \frac{3!}{1!\cdot 2!} ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

Пример 2. $(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$

(Вычислите это сами!)

Числа $C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^3,\ \dots,\ C_n^{n-1}$ *называются биномиальными коэффициентами.*

Их можно вычислить, применяя только сложение, если пользоваться следующей схемой. В верхней строке пишем две единицы. Все последующие строки начинаются и заканчиваются единицей. Промежуточные числа в этих строках получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки. Эта схема называется треугольником Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & & & & & \cdots
\end{array}
$$

Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для $n = 1$; вторая - для $n = 2$; третья - для $n = 3$ и т.д. Поэтому, если необходимо, например, разложить выражение:

$$(a+b)^7,$$

мы можем получить результат моментально, используя таблицу:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Свойства биномиальных коэффициентов.

1. *Сумма коэффициентов разложения* $(a+b)^n$ *равна* 2^n.

Для доказательства достаточно положить $a = b = 1$. Тогда в правой части разложения бинома Ньютона мы будем иметь сумму биномиальных коэффициентов, а слева:

$$(1+1)^n = 2^n.$$

2. *Коэффициенты членов, равноудалённых от концов разложения, равны.*

Это свойство следует из соотношения:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

3. *Сумма коэффициентов чётных членов разложения равна сумме коэффициентов нечётных членов разложения; каждая из них равна*

$$2^{n-1}.$$

Для доказательства воспользуемся биномом: $(1-1)^n = 0^n = 0.$ Здесь чётные члены имеют знак « + » , а нечётные - « - ». Так как в результате разложения получается 0, то следовательно, суммы их биномиальных коэффициентов равны между собой, поэтому каждая из них равна: $2^n : 2 = 2^{n-1}$, что и требовалось доказать.

События. Виды событий

Одно из базовых понятий теории вероятностей – это ***событие***. События бывают ***достоверными***, ***невозможными*** и ***случайными***.

Достоверным называют событие, которое в результате ***испытания*** *(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий)* **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Невозможным называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Подчёркнутый критерий случайности очень важен – так, например, карточный шулер может очень ловко имитировать случайность и давать выигрывать жертве, но ни о каких случайных факторах, влияющих на итоговый результат, речи не идёт.

Любой результат испытания называется ***исходом***, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) **обозначают** большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, \ldots$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$. Исключение составляет буква P, которая зарезервирована под другие нужды.

Запишем следующие случайные события:

A_O – в результате броска монеты выпадет «орёл»;

B_5 – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

C_T – из колоды будет извлечена карта трефовой масти *(по умолчанию колода считается полной)*.

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Следует в третий раз подчеркнуть, что случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле снова показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие C_T становится *невозможным*. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама треф лежит снизу, то он при желании может сделать событие C_T *достоверным* =) Таким образом, в данном примере предполагается, что **карты хорошо перемешаны и их рубашки неразличимы**, т.е. колода не является краплёной. Причём, здесь под «крапом» понимаются даже не «умелые руки», ликвидирующие случайность вашего выигрыша, а видимые дефекты карт. Например, рубашка той же дамы треф может быть грязной, порванной, заклеенной скотчем.

Другая важная характеристика событий – это их равновозможность. Два или бОльшее количество событий называют равновозможными, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например: выпадение орла или решки при броске монеты;

выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;

извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события не равновозможными? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён центр тяжести, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников. События $C_T, C_П, C_Ч, C_Б$ – извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза треф. Здесь становится менее возможным, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, менее возможно, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий

События называют несовместными, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара противоположных событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например:

A_o – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\overline{A}_o$ – в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

B_5 – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

$\overline{B}_5$ – в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события несовместны и противоположны.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

C_T – из колоды будет извлечена карта трефовой масти;

$\overline{C}_T$ – из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют полную группу событий, если в результате отдельно взятого испытания обязательно появится одно из этих событий. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

B_1 – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

B_2 – … 2 очка;

B_3 – … 3 очка;

B_4 – … 4 очка;

B_5 – … 5 очков;

B_6 – … 6 очков.

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ несовместны (поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других) и образуют полную группу (так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий).

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это элементарность исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя

разложить на другие события». Например, события
$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ элементарны, но событие $\overline{B}_5$ не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события $C_Т, C_П, C_Ч, C_Б$ (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – события
$D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_В, D_Д, D_К, D_Т$ (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).
Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.
Совместные события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются совместными, если <u>в отдельно взятом испытании</u> появление одного из них не исключает появление другого. Например:

$C_Т$ – из колоды карт будет извлечена трефа;

D_7 – из колоды карт будет извлечена семёрка.
Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.
Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

D – завтра в 12.00 будет дождь;

G – завтра в 12.00 будет гроза;

S – завтра в 12.00 будет солнце.
Ситуация, конечно, довольно редкая, но совместное появление всех трёх событий в принципе не исключено. Следует отметить, что перечисленные события совместны и попарно, т.е. может быть только ливень с грозой или грибной дождик, или погромыхает неподалёку на фоне ясного неба.

Алгебра событий

Операция сложения событий означает логическую связку ИЛИ,

а операция умножения событий — логическую связку И.
1) Суммой двух событий A и B называется событие $A+B$ которое состоит в том, что наступит или событие A или событие B или оба события одновременно. В том случае, если события несовместны, последний вариант отпадает, то есть может наступить или событие A или событие B.
Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ состоит в том, что произойдёт хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а если события несовместны – то одно и только одно

событие из этой суммы: или событие A_1, или событие A_2, или событие A_3, или событие A_4, или событие A_5.

Примеры:

События $\overline{B}_5 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_6$ (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет или 1, или 2, или 3, или 4, или 6 очков.

Событие $B_{1,2} = B_1 + B_2$ (выпадет не более двух очков) состоит в том, что появится 1 или 2 очка.

Событие $B_{ч} = B_2 + B_4 + B_6$ (будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет или 2 или 4 или 6 очков.

Событие $C_{Ч} + C_{Б}$ заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва или бубна), а событие $D_{В} + D_{Д} + D_{К} + D_{Т}$ – в том, что будет извлечена «картинка» (валет или дама или король или туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событие $C_{Т} + D_7$ состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа или семёрка или семёрка треф. Согласно данному выше определению, хотя бы что-то – или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие $D + G + S$ состоит в том, что завтра в 12.00 наступит ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий, а именно:

– или будет только дождь / только гроза / только солнце;

– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);

– или все три события появятся одновременно.

То есть, событие $D + G + S$ включает в себя 7 возможных исходов.

Второй столп алгебры событий:

2) Произведением двух событий A и B называют событие AB, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение AB означает, что при некоторых обстоятельствах наступит и событие A, и событие B. Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например, произведение $A_1 A_2 A_3 \cdot \ldots \cdot A_{10}$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт и событие A_1, и событие A_2, и событие A_3, …, и событие A_{10}.

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монеты и следующие события:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;

$\overline{A}_1$ – на 1-й монете выпадет решка;

A_2 – на 2-й монете выпадет орёл;

$\overline{A}_2$ – на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:

– событие $A_1 A_2$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й и на 2-й) выпадет орёл;

– событие $\overline{A}_1 \overline{A}_2$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й и на 2-й) выпадет решка;

– событие $A_1 \overline{A}_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл и на 2-й монете решка;

– событие $\overline{A}_1 A_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка и на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события $A_1 A_2,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2,\ A_1 \overline{A}_2,\ \overline{A}_1 A_2$ несовместны (т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки) и образуют полную группу (поскольку учтены все возможные исходы броска двух монет).

Давайте просуммируем данные события: $A_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 + A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку И, а сложение – ИЛИ. Таким образом, сумму

$A_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 + A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$ легко прочитать понятным человеческим языком: «выпадут два орла или две решки или на 1-й монете выпадет орёл и на 2-й решка или на 1-й монете выпадет решка и на 2-й монете орёл »

Это был пример, когда в одном испытании задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это повторные испытания, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

$B_{(1)4}$ – в 1-м броске выпадет 4 очка;

$B_{(2)5}$ – во 2-м броске выпадет 5 очков;

$B_{(3)6}$ – в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событие $B_{(1)4} \cdot B_{(2)5} \cdot B_{(3)6}$ состоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка и во 2-м броске выпадет 5 очков и в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше комбинаций (исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

Вероятность события

Вероятность события – это центральное понятие теории вероятностей. … Убийственно логичная вещь, но с чего-то надо было начинать =) Существует несколько подходов к её определению:

Классическое определение вероятности;

Обозначения. Вероятность некоторого события A обозначается большой латинской буквой P, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

$P(A_O)$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
$P(B_5)$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
$P(C_T)$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.
Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква p. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий A_O, B_5, C_T и их вероятностей $P(A_O), P(B_5), P(C_T)$ в пользу следующей стилистики::
$p_O = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
$p_5 = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
$p_T = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.
Данный вариант популярен при решении практических задач, поскольку позволяет заметно сократить запись решения. Как и в первом случае, здесь удобно использовать «говорящие» подстрочные/надстрочные индексы.

Классическое определение вероятности:

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где:
n – общее число всех <u>равновозможных</u>, <u>элементарных</u> исходов этого испытания, которые образуют <u>полную группу событий</u>;
m – количество <u>элементарных</u> исходов, благоприятствующих событию A.
При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют <u>полную группу</u>, таким образом, общее число исходов $n = 2$; при этом, каждый из них <u>элементарен</u> и <u>равновозможен</u>. Событию A_O благоприятствует $m = 1$ исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: $P(A_O) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

Аналогично – в результате броска кубика может появиться $n = 6$ элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию B_5 благоприятствует единственный $m = 1$ исход (выпадение пятёрки). Поэтому: $P(B_5) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

Особое внимание обращаю на третий пример. Здесь будет некорректным сказать «раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы $P(C_T) = \frac{1}{4}$». В определении речь идёт об <u>элементарных</u> исходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт (несовместные элементарные исходы, образующие полную группу), из них 9 карт трефовой масти (кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию C_T); по классическому определению вероятности: $P(C_T) = \frac{m}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Именно так!

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна $\frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$, выпадения пятёрки $\frac{1}{6} \cdot 100\% \approx 16{,}67\%$, извлечения трефы $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$, но в теории вероятностей ЭТОГО ДЕЛАТЬ НЕ ПРИНЯТО (хотя не возбраняется прикидывать проценты в уме).

Принято использовать доли единицы, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах $0 \le P(A) \le 1$. При этом если $P(A) = 0$, то событие A является невозможным, если $P(A) = 1$ – достоверным, а если $0 < P(A) < 1$, то речь идёт о случайном событии.

! Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!

При классическом подходе к определению вероятности крайние значения (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

K – из урны будет извлечён красный шар;

Z – из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов: $n = 10$. Событию K благоприятствуют все возможные исходы $(m = 10)$, следовательно, $P(K) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1$, то есть данное событие достоверно. Для 2-го же события благоприятствующие исходы отсутствуют $(m = 0)$, поэтому $P(Z) = \frac{m}{n} = \frac{0}{10} = 0$, то есть событие Z невозможно.

Особый интерес представляют события, вероятность наступления которых чрезвычайно мала. Хоть такие события и являются случайными, для них справедлив следующий постулат:
в единичном испытании маловозможное событие не произойдёт.

Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице. Грубо говоря, если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

A_o – в результате броска монеты выпадет орёл;
$\overline{A}_o$ – в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме: $P(A_o) + P(\overline{A}_o) = 1$

Совершенно понятно, что данные события равновозможны и их вероятности одинаковы $P(A_o) = \frac{1}{2}, P(\overline{A}_o) = \frac{1}{2}$.

По причине равенства вероятностей равновозможные события часто называют равновероятными. А вот и скороговорка на определение степени опьянения получилась =)

Пример с кубиком: события $B_5, \overline{B}_5$ противоположны, поэтому $P(B_5) + P(\overline{B}_5) = 1$.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность $P(B_5) = \frac{1}{6}$ того, что выпадет пятёрка, легко вычислить вероятность того, что она не выпадет:

$$P(\overline{B}_5) = 1 - P(B_5) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Это гораздо проще, чем суммировать вероятности пяти элементарных исходов. Для элементарных исходов, к слову, данная теорема тоже справедлива:

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) = 1$$

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, как отмечалось выше, равновозможны – и теперь мы можем сказать, что равновероятны. Вероятность выпадения любой грани кубика равна $\frac{1}{6}$:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = P(B_6) = \frac{1}{6}$$

Ну и на закуску колода: поскольку нам известна вероятность $P(C_T)=\frac{1}{4}$ того, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти:

$$P(C_T)+P(\overline{C}_T)=1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{C}_T)=1-P(C_T)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Заметьте, что рассмотренные пары событий $B_5, \overline{B}_5$ и $C_T, \overline{C}_T$ не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.
В упрощенной версии записи решения вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой q. Например, если $p=0,7$ – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то $q=1-p=1-0,7=0,3$ – вероятность того, что он промахнётся.

! В теории вероятностей буквы p и q нежелательно использовать в каких-то других целях.

Решить следующие задачи:

1) В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

2) Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет: а) пять очков; б) не более четырёх очков; в) от 3 до 9 очков включительно.

3) Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков: а) будет равно семи; б) окажется не менее 20; в) будет чётным.