Закон Кулона: простые задачи.

Задача **1.** Заряженный шарик приводят в соприкосновение с точно таким же незаряженным шариком. Находясь на расстоянии r=15 см, шарики отталкиваются с силой F=1 мН.  Каков был первоначальный заряд заряженного шарика?

При соприкосновении заряд разделится ровно пополам (шарики одинаковые).По данной силе взаимодействия можем определить заряды шариков после соприкосновения (не забудем, что все величины надо представить в единицах СИ – F=10^{-3} Н, r=0,15 м):

\[F=\frac{kq^2}{r^2}\]

\[q^2=\frac{Fr^2}{k}\]

\[k=\frac{1}{4 \pi  \varepsilon_0}=9\cdot 10^9\]

\[q=\sqrt{\frac{Fr^2}{k}}=\sqrt{\frac{10^{-3}\cdot(0,15)^2}{9\cdot 10^9}}=5\cdot 10^{-8}\]

Тогда до соприкосновения заряд заряженного шарика был вдвое больше:

\[q_1=2\cdot 5\cdot 10^{-8}=10^{-7}\]

Ответ: q_1=10^{-7}=10\cdot10^{-6} Кл, или 10 мкКл.

Задача **2.** Два маленьких одинаковых заряженных шарика с зарядами  q_1=2 мкКл и q_2=-4 мкКл  находятся на расстоянии r=30 см друг от друга. На сколько изменится сила их взаимодействия, если шарики привести в соприкосновение и затем вновь развести на прежнее расстояние?

Рассчитаем силу взаимодействия до соприкосновения, подставляем данные в единицах СИ:

\[F=\frac{kq_1\cdot q_2}{r^2}=\frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot10^{-6} \cdot 4\cdot10^{-6} }{(0,3)^2}=0,8\]

В формулу для вычисления кулоновской силы подставляем модули зарядов, а про себя помним, что раз заряды разных знаков, то они притягиваются.

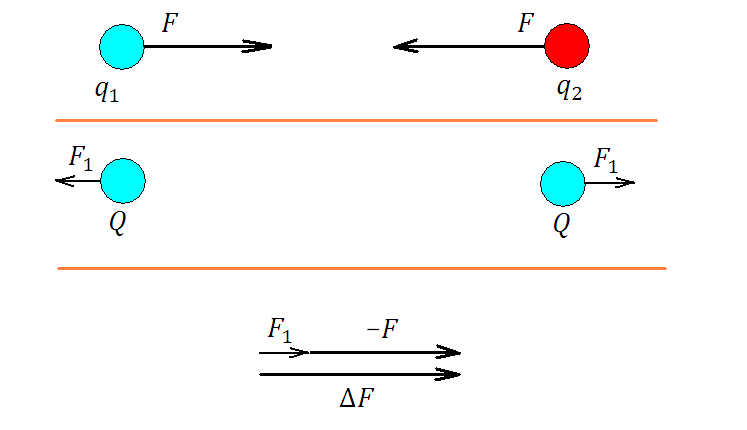
Теперь подумаем, что случится при прикосновении таких разноименно заряженных шариков. Если бы заряды их были равны, то они полностью компенсировали бы друг друга: каждый электрон нашел бы себе положительную пару. Но заряды не равны, а именно, заряд отрицательно заряженного шарика больше по модулю. То есть электронов больше, чем положительных ионов. При соприкосновении шариков  электроны и положительные ионы образуют  нейтральные атомы, и все равно электроны останутся в избытке. Этот избыток разделится ровно пополам между шариками, и каждый станет обладателем отрицательного заряда:

\[Q=\frac{q_1+q_2}{2}=\frac{2\cdot10^{-6}+(-4\cdot10^{-6})}{2}=-1\cdot10^{-6}\]

Теперь шарики будут отталкиваться  с силой, равной

\[F_1=\frac{kQ^2}{r^2}=\frac{9\cdot 10^9\cdot 1\cdot10^{-12}}{(0,3)^2}=0,1\]

Теперь определим, на сколько изменилась сила взаимодействия. Тут надо вспомнить правило сложения-вычитания сил. Предположим, сила притяжения была направлена влево. Тогда сила отталкивания будет направлена вправо, то есть изменение силы равно:



К задаче 2

\[\Delta F=F_2-F_1=0,1-(-0,8)=0,9\]

Ответ: \Delta F=0,9 Н.

Задача **3.** Два маленьких одинаковых по размеру шарика, находясь на расстоянии R=0,2 м, притягиваются с силой F_1=4 \cdot 10^{-3} Н. После того как шарики были приведены в соприкосновение и затем вновь разведены на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой F_2=2,25 \cdot 10^{-3} Н. Определить первоначальные заряды шариков q_1 и q_2.

Понятно, что до соприкосновения заряды разноименные, а после – одноименные. Далее оперируем модулями зарядов вплоть до момента записи ответа.

Сила взаимодействия до прикосновения

\[F_1=\frac{kq_1\cdot q_2}{r^2}\]

После прикосновения заряды шариков будут одинаковыми и равными

\[Q=\frac{q_1-q_2}{2}\]

Тогда шарики отталкиваются с силой:

\[F_2=\frac{kQ^2}{r^2}=\frac{k(q_1-q_2)^2}{4r^2}\]

Из этих двух уравнений имеем систему:

\[\begin{Bmatrix} { q_1\cdot q_2=\frac{F_1 r^2}{k}} \\ {(q_1-q_2)^2=\frac{4F_2 r^2}{k}} \end{matrix}\]

\[\begin{Bmatrix} { q_1\cdot q_2=\frac{F_1 r^2}{k}} \\ {(q_1^2-2q_1q_2+q_2^2=\frac{4F_2 r^2}{k}} \end{matrix}\]

Разделим уравнения одно на другое:

\[\frac{ q_1^2-2q_1q_2+q_2^2}{ q_1\cdot q_2}=\frac{4F_2}{F_1}\]

\[\frac{ q_1^2-2q_1q_2+q_2^2}{ q_1\cdot q_2}=\frac{4F_2}{F_1}\]

\[\frac{q_1}{q_2}-2+\frac{q_2}{q_1}=\frac{4\cdot2,25 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}}\]

\[\frac{q_1}{q_2}-2+\frac{q_2}{q_1}=\frac{9}{4}\]

\[\frac{q_1}{q_2}-4,25+\frac{q_2}{q_1}=0\]

Обозначим \frac{q_1}{q_2}=a, тогда:

\[a-4,25+\frac{1}{a}=0\]

Или

\[a^2-4,25a+1=0\]

\[D=4,25^2-4=\frac{289}{16}-\frac{64}{16}=\frac{225}{16}\]

\[a_1=\frac{4,25+\sqrt{\frac{225}{16}}}{2}=4\]

\[a_2=\frac{4,25-\sqrt{\frac{225}{16}}}{2}=\frac{1}{4}\]

Делая обратную замену, получим \frac{q_1}{q_2}=4 или \frac{q_1}{q_2}=\frac{1}{4}, то есть либо q_1=4q_2, либо q_1=\frac{q_2}{4}.

Произведение зарядов можно найти:

\[q_1\cdot q_2=\frac{F_1 r^2}{k}}=\frac{4 \cdot 10^{-3}\cdot(0,2)^2}{9 \cdot 10^9}=\frac{16}{9}\cdot 10^{-14}\]

Тогда:

\[q_1\cdot q_2=\frac{16}{9}\cdot 10^{-14}\]

\[4q_2\cdot q_2=\frac{16}{9}\cdot 10^{-14}\]

\[q_2^2=\frac{4}{9}\cdot 10^{-14}\]

\[q_2=\sqrt{\ frac{4}{9}\cdot 10^{-14}}=\frac{2}{3}\cdot 10^{-7}\]

В этом случае q_1=\frac{8}{3}\cdot 10^{-7}.

Во втором случае, когда q_1=\frac{q_2}{4}, имеем:

\[q_1\cdot q_2=\frac{16}{9}\cdot 10^{-14}\]

\[\frac{1}{4}q_2\cdot q_2=\frac{16}{9}\cdot 10^{-14}\]

\[q_2^2=\frac{64}{9}\cdot 10^{-14}\]

\[q_2=\sqrt{\frac{64}{9}\cdot 10^{-14}}=\frac{8}{3}\cdot 10^{-7}\]

В этом случае q_1=\frac{2}{3}\cdot 10^{-7}.

Поскольку в итоге шарики отталкиваются, то итоговые заряды – отрицательные. Тогда варианты ответа: либо q_1=\frac{2}{3}\cdot 10^{-7}, q_2=-\frac{8}{3}\cdot 10^{-7} Кл, либо наоборот, q_2=\frac{2}{3}\cdot 10^{-7}, q_1=-\frac{8}{3}\cdot 10^{-7} Кл.

Задача **4.** Два одинаковых  маленьких металлических шарика притягиваются с некоторой силой. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на расстояние в n=2 раза большее, чем прежде. При этом модуль силы взаимодействия уменьшился в m=5 раз. Найти величину заряда первого шарика до соприкосновения, если  второй имел заряд q_2=1,6 нКл.

Запишем силу взаимодействия шариков до сприкосновения:

\[F_1=\frac{kq_1\cdot q_2}{r^2}\]

После соприкосновения она уменьшилась в 5 раз:

\[F_2=\frac{F_1}{5}=\frac{kq_1\cdot q_2}{5r^2}\]

С другой стороны, заряды шариков изменились, и сила взаимодействия стала равной:

\[F_2=k\left(\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2\frac{1}{(2r)^2}\]

Приравняем правые части этих равенств:

\[\frac{kq_1\cdot q_2}{5r^2}= k\left(\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2\frac{1}{4r^2}\]

\[\frac{q_1\cdot q_2}{5}= \frac{(q_1-q_2)^2}{4}\frac{1}{4}\]

\[\frac{16}{5}= \frac{q_1-2q_1q_2+q_2^2}{q_1q_2}\]

\[\frac{16}{5}= \frac{q_1}{q_2}-2+\frac{q_2}{q_1}\]

Опять вводим замену и решаем квадратное уравнение:

Обозначим \frac{q_1}{q_2}=t, тогда:

\[t-2+\frac{1}{t}=\frac{16}{5}\]

Или

\[t^2-\frac{26}{5}t+1=0\]

\[D=\frac{26^2}{25}-4=\frac{676}{25}-\frac{100}{25}=\frac{576}{25}\]

\[t_1=\frac{\frac{26}{5}+\sqrt{\frac{576}{25}}}{2}=5\]

\[t_2=\frac{\frac{26}{5}-\sqrt{\frac{576}{25}}}{2}=\frac{1}{5}\]

Делаем обратную замену, получим \frac{q_1}{q_2}=5 или \frac{q_1}{q_2}=\frac{1}{5}, то есть либо q_1=5q_2, либо q_1=\frac{q_2}{5}. Теперь отыщем q_1:

\[q_1=5q_2=5\cdot1,6\cdot 10^{-9}=8\cdot 10^{-9}\]

Либо же

\[q_1=\frac{q_2}{5}=\frac{1,6\cdot 10^{-9}}{5}=0,32\cdot 10^{-9}\]

Ответ: q_1=8\cdot 10^{-9}, или 8нКл, либо q_1=0,32\cdot 10^{-9}, что равно 0,32 нКл.