**3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а апофема — 15 см. Найдите боковое ребро пирамиды.**

*Решение* (рис. 141). Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ со стороной основания $AB = 12$ см и апофемой $SM = 15$ см. $SM \perp AB$ по определению апофемы, $\Delta ABS$ равнобедренный, так как $SABCD$ — правильная пирамида; следовательно, $SM$ — медиана $\Delta ABS$, значит,

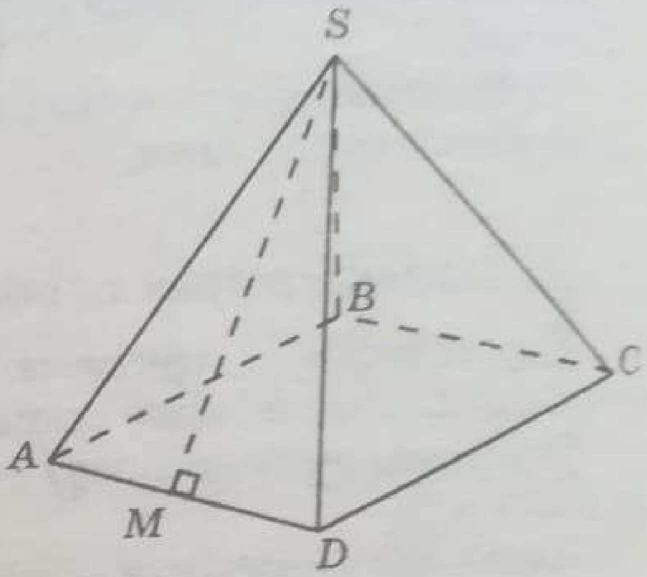


Рис. 141

$$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см}.$$

$\Delta SAM$ — прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора

$$SA = \sqrt{SM^2 + AM^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29} \text{ (см)}.$$

*Ответ*: $3\sqrt{29}$ см.

**4. Дан прямоугольный параллелепипед. Угол между диагональю основания и одной из его сторон равен $\alpha$. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен $\beta$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если диагональ основания равна $k$.**

*Решение* (рис. 142). Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

**3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 4 см, а сторона основания – 6 см. Найдите объем пирамиды.**

*Решение* (рис. 61). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с боковым ребром $SA = 4$ см и стороной $AC = 6$ см найдем объём. Радиус $OA$ окружности, описанной около правильного треугольника $ABC$ со стороной 6 см, равен

$$OA = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

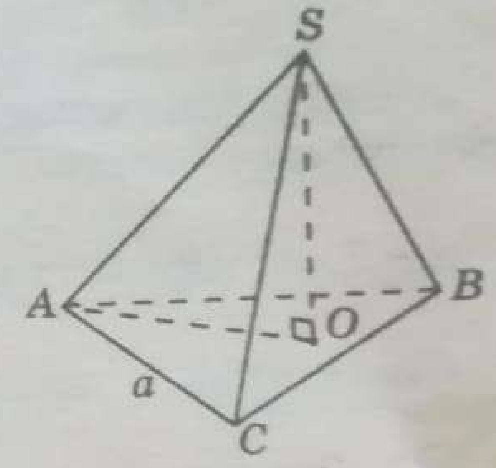

Рис. 61

Из прямоугольного $\Delta AOS$ по теореме Пифагора высота пирамиды равна

$$OS = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2 \text{ (см)}.$$

Площадь правильного треугольника

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Поэтому объём пирамиды равен

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot OS = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2 = 6\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

*Ответ*: $6\sqrt{3}$ см$^3$.

**4. Два равных шара радиуса *R* расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.**

*Решение*. Рассмотрим два равных шара радиуса $R$ с центрами боковому ребру и формула объема имеет прежний вид.

Рис. 79

**3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а высота — 12 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.**

*Решение* (рис. 80). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ со стороной основания $AB = 10$ см и высотой $SO = 12$ см найдем $S_{полн}$.

Диагонали квадрата $ABCD$ в точке пересечения делятся пополам, поэтому $AO = CO$. В равнобедренном треугольнике $SBC$ высота $SK$ является и медианой, поэтому $BK = CK$. Следовательно, $KO$ – средняя линия $ABC$ и $KO = 5$ см.

Из прямоугольного $\Delta SOK$ по теореме Пифагора апофема пирамиды

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$$

$$= \sqrt{169} = 13 \text{ (см)};$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SK;$$

$$P_{осн} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 10 = 40 \text{ (см)};$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 13 = 260 \text{ (см}^2\text{)};$$

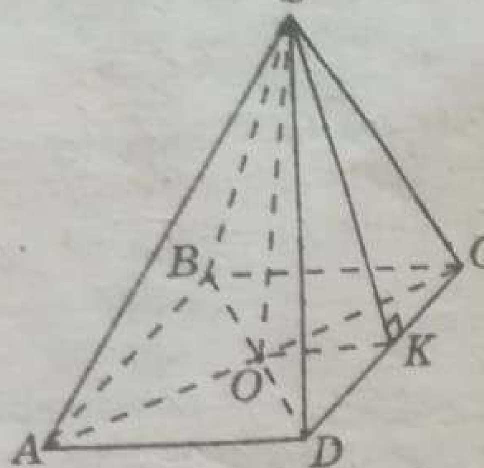

Рис. 80

$$S_{осн} = AB^2 = 10^2 = 100 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 100 + 260 = 360 \text{ (см}^2\text{)}.$$

*Ответ*: 360 см$^2$.

**3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 15 см, а один из катетов – 9 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно её основанию.**

*Решение* (рис. 74). В пирамиде $SABC$ с основанием $ABC$, где $\angle B = 90°$, $AC = 15$ см, $AB = 8$ см. Найдем площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды $SH$ параллельно плоскости $ABC$. Плоскость $\Delta ABC \parallel \Delta A_1B_1C_1$, следовательно $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$, значит, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (углы с сонаправленными сторонами), следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по двум углам), значит,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2; \ \frac{SH}{SH_1} = 2.$$

Из $\Delta ABC$ по теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{15^2 - 8^2} =$$

$$= \sqrt{144} = 12 \text{ (см)};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$\frac{54}{S_{A_1B_1C_1}} = 2^2;$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{54}{4} = 13{,}5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

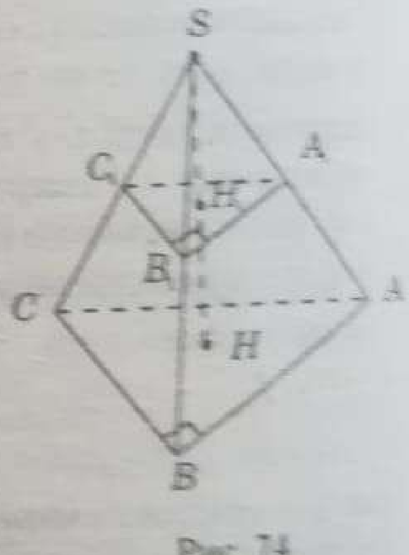

Рис. 74

*Ответ*: 13,5 см$^2$.

**4. Плоскости α и β пересекаются по прямой $a$ и перпендикулярны плоскости γ. Докажите, что прямая $a$ перпендикулярна плоскости γ.**

*Доказательство* (рис. 75). Возьмем на прямой $a$ точку $C$ и опустим из этой точки перпендикуляр $CM$ на плоскость γ. Предположим, что $CM$ не лежит в плоскости α.

В плоскости α проведем прямую $CA$, перпендикулярную линии пересечения $b$ плоскостей α и γ, и рассмотрим $\Delta ACM$.

Так как $CM \perp \gamma$, то $\angle AMC$ прямой.

Так как прямая $CA$ лежит в плоскости α, перпендикулярной плоскости γ, и перпендикулярна их линии пересечения, то она пер-

$OB > OA$, т.е. $OB > R$, следовательно, точка $B$ не принадлежит шару.

Рис. 50

Теорема доказана.

**Обратная теорема.** Если радиус шара перпендикулярен плоскости, которая проходит через его конец, лежащий на шаре, то эта плоскость касается шара.

### 3. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, а апофема — 15 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

*Решение* (рис. 51). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ $SO$ — высота, $SM$ — апофема. Найдем боковое ребро $SA$. Из $\Delta SMO$:

$$\angle O = 90°,$$

$$MO = \sqrt{SM^2 - SO^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} =$$

$$= 9 \text{ (см)}.$$

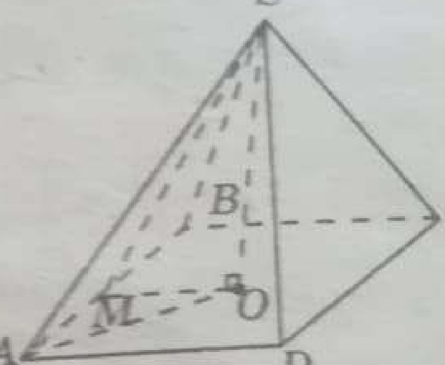


Рис. 51

Из $\Delta OMA$:

$$\angle M = 90°,$$

$$AO = MO : \sin 45° = 9 : \frac{1}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Из $\Delta SOA$:

$$\angle O = 90°,$$

$$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + 12^2} = \sqrt{162 + 144} = \sqrt{306} =$$

$$= 3\sqrt{34} \text{ (см)}.$$

*Ответ:* $3\sqrt{34}$ см.

### 4. Ребро куба $a$. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

*Решение* (рис. 52). Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где $AB = a$, найдем расстояние $AH$ от вершины $A$ до диагонали $B_1D$. Так как расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного из

**3. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 7 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.**

*Решение* (рис. 88). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с высотой $SO = 7$ см и углом 45° между боковым ребром $SA$ и плоскостью основания $ABC$ найдем объём. Так как $SO$ — перпендикуляр к плоскости основания, то $\angle OAS$ — угол между ребром $SA$ пирамиды и плоскостью $ABC$, т.е. $\angle OAS = 45°$. $\Delta SAO$ — прямоугольный и равнобедренный с острым углом $\angle A = 45°$. Следовательно, $AO = 7$ см и диагональ основания $AC = 14$ см.

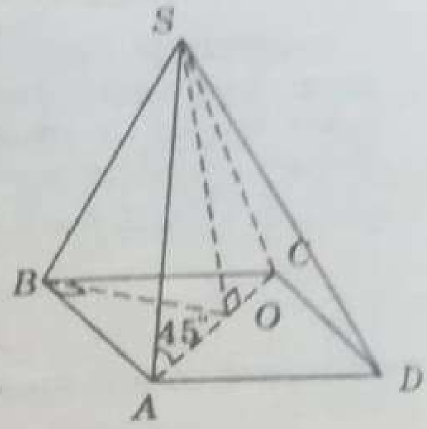


Рис. 88

Так как в основании пирамиды квадрат, диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и равны, то $BO = AO = 7$ см, т.е. $BO$ — высота $\Delta ABC$.

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BO = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 98 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Следовательно, объем пирамиды

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 98 \cdot 7 = 228\frac{2}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

*Ответ*: $228\frac{2}{3}$ см$^3$.

**4. Докажите, что площадь поверхности куба равна $2d^2$, где $d$ — диагональ куба.**

*Доказательство.* Пусть ребро куба равно $a$, тогда площадь его грани равна $a^2$. У куба 6 граней, значит, $S_{\text{пол.пов.}} = 6a^2$. В кубе квадрат его диагонали равен сумме квадратов трех его линейных измерений, т.е. $d^2 = 3a^2$.

Следовательно, $S_{\text{пол.пов.}} = 2d^2$.