Некоторые приложения пределов, производных и интегралов в экономике

Применение пределов в экономических расчетах

Сложные проценты

- Рассмотрим формулу сложных процентов:

  $S = P(1 + i)^n$

  Здесь P - первоначальная сумма, i - ставка процентов (в виде десятичной дроби), S - сумма, образовавшаяся к концу срока ссуды в конце *n*-го года.
- Обобщим формулу сложных процентов для случая, когда проценты начисляются *m* раз в году:

  $S = P (1 + i/m)^{mn}$
- Наращенная сумма при дискретных процессах находится по этой формуле, здесь *m* - число периодов начисления в году, *i* - годовая или номинальная ставка. Чем больше *m*, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем:

$$S = \lim_{m\to\infty} P (1 + i/m)^{mn} = P \lim_{m\to\infty} ((1 + i/m)^{m})^{n}.$$

Поскольку $\lim_{m\to\infty} (1 + i/m)^{m} = e^{i}$, то $S = P e^{in}$

Предельный анализ (производные) в экономике. Эластичность функции

- В экономических исследованиях для обозначения производных часто пользуются специфической терминологией. Например, если f(x) есть производственная функция, выражающая зависимость выпуска какой-либо продукции от затрат фактора x, то f '(x) называют ***предельным продуктом***; если g(x) есть функция издержек, т. е. функция g(x) выражает зависимость общих затрат от объема продукции x, то g'(x) *называют* ***предельными издержками***.
- **Предельный анализ в экономике** - совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменении объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений.

- Если зависимость между двумя показателями *v* и *x* задана аналитически:

  v = f(x) - то ***средняя величина*** представляет собой отношение *v/x*, а *предельная* – производную

$$\frac{dv}{dx}$$

Нахождение производительности труда.

- Пусть известна функция $u = u(t)$, выражающая количество произведенной продукции *u* за время работы *t*. Вычислим количество произведенной продукции за время $\Delta t = t_1 - t_0$: $\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0+\Delta t) - u(t_0)$. *Средней производительностью труда* называется отношение количества произведенной продукции к затраченному времени, т.е. $z_{ср.} = \Delta u/\Delta t$.
- *Производительностью труда рабочего* $z(t_0)$ в момент t0 называется предел, к которому стремится $z_{ср.}$ при $\Delta t \to 0$: $z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Вычисление производительности труда, таким образом, сводится к вычислению производной: $z(t_0) = u'(t_0)$.

- Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции *x*. Поэтому можно записать K = K(x). Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Количеству продукции $x+\Delta x$ соответствуют издержки производства $K(x+\Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции $\Delta K = K(x+\Delta x) - K(x)$.
- Среднее приращение издержек производства есть $\Delta K/\Delta x$. Это приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.
- Предел $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$$

называется *предельными издержками производства*.

- Если обозначить через *u(x)* выручку от продажи *x* единиц товара, то и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ называется ***предельной выручкой***.

Эластичность функции

- ***Эластичностью функции*** y = f(x) относительно переменной *x* называют предел $\lim\limits_{\Delta x \to o} \dfrac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \dfrac{x}{y} f'(x)$

  Его обозначают E_x (y) = x/y f ′ (x) = $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

  Эластичность относительно *x* есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

Экономическое толкование

Экономисты измеряют степень чуткости, или чувствительности, потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности. Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чуткость потребителей к изменениям цен, небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть ***относительно эластичным*** или просто эластичным.

Что касается других продуктов, потребители относительно нечутки к изменению цен на них, то есть существенное изменение в цене ведет лишь к небольшому изменению в количестве покупок. В таких случаях спрос ***относительно неэластичен*** или просто неэластичен. Термин *совершенно неэластичный* спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества спрашиваемой продукции. Примером может служить спрос больных острой формой диабета на инсулин или спрос наркоманов на героин. И наоборот, когда при самом малом снижении цены покупатели увеличивают покупки до предела своих возможностей - тогда мы говорим, что спрос является ***совершенно эластичным***.

Примеры экономических задач:

- **Пример 1.** Нужно построить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трех сторон она была отгорожена проволочной сеткой, а четвертой стороной примыкала к стене. Для этого имеется *a* погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?

Пример 2

- Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V=16\pi \approx 50$ м^3. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Использование интегралов в экономических расчетах

- **Пример.** Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией

  $f(t) = 3/(3t + 1) + 4$.

- *Решение.* Если непрерывная функция $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt .$$

- В нашем случае

$$V = \int_2^3 \left(\frac{3}{3t+1} + 4\right)dt = \left(\ln(3t+1) + 4t\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln 10/7 + 4$$

- **Пример.** Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией f(t) = 2t + 5.
- *Решение.*

  Имеем:

  $$V = \int_0^3 (2t+5)dt = \left(\frac{2t^2}{2} + 5t\right)\Big|_0^3 = 9 + 15 = 24 \quad .$$